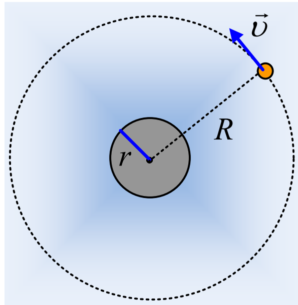
Ένας δορυφόρος σε πτώση.



Ένας δορυφόρος στρέφεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R=10.000km εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση με περίοδο T=10.000s, γύρω από έναν πλανήτη.

i) Να υπολογιστεί η επιτάχυνσή του.

Σε μια στιγμή ο δορυφόρος συγκρούεται με έναν αστεροειδή, με αποτέλεσμα να μηδενιστεί η ταχύτητά του και να αρχίσει να πέφτει προς την επιφάνεια του πλανήτη.

ii) Ποια η αρχική επιτάχυνση με την οποία ξεκινά την πτώση του;

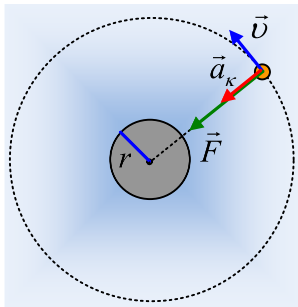
iii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του δορυφόρου, ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την σύγκρουση;

iv) Μετά από λίγο, ο δορυφόρος περνάει από ένα σημείο Α, όπου η ένταση του πεδίου βαρύτητας του πλανήτη είναι ίση με 8N/kg. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του δορυφόρου στη θέση αυτή;

v) Αν η μέγιστη επιτάχυνση που αποκτά ο δορυφόρος κατά την πτώση του είναι $16m/s^2$, να υπολογιστεί η ακτίνα r του πλανήτη.

Ο πλανήτης να θεωρηθεί ακίνητος, χωρίς ατμόσφαιρα, ενώ δεν υπάρχουν βαρυτικά πεδία οφειλόμενα σε άλλα ουράνια σώματα. Δίνεται επίσης $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:



i) Η επιτάχυνση του δορυφόρου κατά την διάρκεια της κυκλικής του κίνησης, είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση, με μέτρο:

$$a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} \quad (1)$$

Αλλά για την ταχύτητα ισχύει:

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 10^7}{10^4} m/s = 2\pi \cdot 10^3 m/s$$

Οπότε $a_\kappa = \dfrac{\upsilon^2}{R} = \dfrac{(2\pi \cdot 10^3)^2}{10^7} m/s^2 = 4m/s^2$.

ii) Η επιτάχυνση του δορυφόρου πριν την σύγκρουση, αλλά και αμέσως μετά, οφείλεται στη δύναμη παγκόσμιας έλξης. Αλλά τότε αν πριν την σύγκρουση είχε επιτάχυνση με κατεύθυνση προς το κέντρο του πλανήτη και μέτρο $4m/s^2$, τότε την ίδια επιτάχυνση θα έχει και αμέσως μετά.

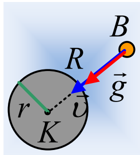
iii) Πριν την σύγκρουση το μέτρο της ταχύτητας έχει σταθερό μέτρο, οπότε $\dfrac{d|\upsilon|}{dt} = 0$ (η επιτάχυνση αλλάζει απλώς την κατεύθυνση της ταχύτητας), ενώ μετά την κρούση, ο δορυφόρος θα αρχίσει να επιταχύνεται κατά μήκος της ακτίνας R και η επιτάχυνση θα μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας, οπότε:

$$\frac{d|\upsilon|}{dt} = 4\,{}^{m/s}\!/_{s}\,.$$

iv) Αν η ένταση του πεδίου βαρύτητας στο σημείο Α είναι 8N/kg, τότε η επιτάχυνση της βαρύτητας θα έχει τιμή $g=8m/s^2$, οπότε τόση θα είναι και η επιτάχυνση του δορυφόρου.

Προφανώς ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας θα είναι κατακόρυφος με φορά προς το κέντρο του πλανήτη και μέτρο $\frac{d\upsilon_A}{dt} = 8\,{}^{m/s}\!/_{s}$.

v) Σε μια τυχαία θέση Β, η οποία απέχει κατά R από το κέντρο Κ του πλανήτη, η επιτάχυνση κατά την πτώση, ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας δίνεται από την εξίσωση:



$$g = G\frac{M}{R^2} \quad (2)$$

Όπου Μ η μάζα του πλανήτη. Αλλά τότε όταν μικραίνει η απόσταση R θα αυξάνεται η επιτάχυνση, οπότε τη μεγαλύτερη επιτάχυνση θα την έχουμε τη στιγμή που ο δορυφόρος φτάνει στο έδαφος και R=r. Έτσι εφαρμόζοντας την εξίσωση (2) για την αρχική και τελική θέση κατά την πτώση, παίρνουμε:

$$g_a = G\frac{M}{R^2} \text{ και } g_\tau = G\frac{M}{r^2}$$

Και με διαίρεση κατά μέλη:

$$\frac{g_a}{g_\tau} = \frac{G\frac{M}{R^2}}{G\frac{M}{r^2}} = \frac{r^2}{R^2} \rightarrow$$

$$r = R\sqrt{\frac{g_a}{g_\tau}} = 10^7\sqrt{\frac{4}{16}}m = 2{,}5\cdot 10^6\,m = 2.500km$$

dmargaris@gmail.com