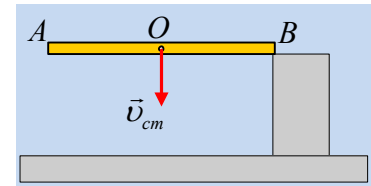


### Μια ράβδος συγκρούεται με ένα σκαλοπάτι.

Μια ομογενής ράβδος AB μήκους  $\ell$  και μάζας  $M$  πέφτει ελεύθερα και σε μια στιγμή το άκρο της B κτυπά στην πάνω πλευρά ενός λείου σκαλοπατιού. Ελάχιστα πριν την κρούση, το κέντρο μάζας O της ράβδου έχει κατακόρυφη ταχύτητα  $v_{cm}=2\text{m/s}$ , ενώ το άκρο A έχει μηδενική ταχύτητα.

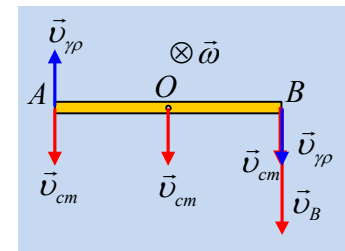


- i) Ποια η ταχύτητα του άκρου B της ράβδου ελάχιστα πριν την κρούση;
- ii) Κατά τη διάρκεια της κρούσης της ράβδου με το σκαλοπάτι:
  - α) Η δύναμη που ασκήθηκε στη ράβδο από το σκαλοπάτι, είναι κατακόρυφη.
  - β) Η ορμή της ράβδου παραμένει σταθερή.
  - γ) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή.
- iii) Αν το άκρο B, αμέσως μετά την κρούση, έχει κατακόρυφη ταχύτητα με φορά προς τα πάνω μέτρου  $1\text{m/s}$ , ενώ το άκρο A κατακόρυφη ταχύτητα με φορά προς τα κάτω μέτρου  $3\text{m/s}$ , να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική ή όχι.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της  $I = \frac{1}{12} M\ell^2$ .

#### Απάντηση:

- i) Αφού το άκρο της ράβδου A, δεν έχει την ταχύτητα του κέντρου μάζας O, η κίνηση της ράβδου είναι σύνθετη, την οποία μπορούμε να μελετήσουμε ως μια μεταφορική με ταχύτητα ίση με  $v_{cm}$  και μια περιστροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το μέσον O, με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , όπως στο σχήμα.



Αλλά τότε για την ταχύτητα του άκρου A ισχύει:

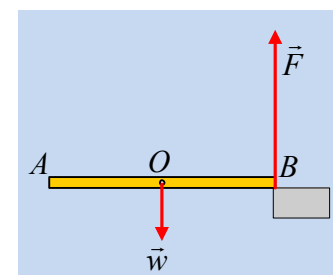
$$\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho} \rightarrow$$

$$v_{\gamma\rho} = v_{cm} = 2\text{m/s} \rightarrow$$

$$\omega \frac{\ell}{2} = v_{cm} \rightarrow \omega\ell = 2v_{cm} = 4\text{m/s}$$

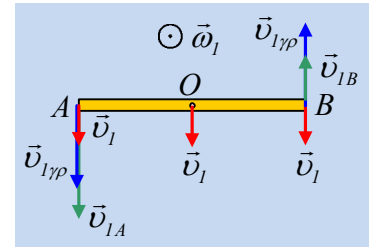
Αλλά τότε το άκρο B έχει ταχύτητα  $v_B = v_{cm} + v_{\gamma\rho} = 4\text{m/s}$ , κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω.

- ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο στη διάρκεια της κρούσης, όπου  $\vec{F}$  η δύναμη από το σκαλοπάτι, κάθετη στο λείο σκαλοπάτι, συνεπώς κατακόρυφη (ακόμη και αν το επίπεδο δεν ήταν λείο η δύναμη θα ήταν κατακόρυφη, αφού η ταχύτητα του άκρου A είναι κατακόρυφη!). Αλλά τότε στη ράβδο ασκούνται δυνάμεις που μεταβάλουν και την ορμή της και τη στροφορμή της, ως προς οποιοδήποτε σημείο και αν την υπολογίσουμε. Έτσι έχουμε:



- α) Η δύναμη που ασκήθηκε στη ράβδο από το σκαλοπάτι, είναι κατακόρυφη. **Σ.**
- β) Η ορμή της ράβδου παραμένει σταθερή. **Λ.**
- γ) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή. **Λ.**

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες των άκρων Α και Β της ράβδου αμέσως μετά την κρούση. Αφού το άκρο Α έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το Β θα πρέπει η ταχύτητα κέντρου μάζας και η γραμμική ταχύτητα εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης της ράβδου, να έχουν την ίδια φορά, αλλά τότε η ταχύτητα κέντρου μάζας, έστω  $v_1$  και η γωνιακή ταχύτητα  $\omega_1$  θα είναι όπως στο διπλανό σχήμα. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας  $v_1$  θα είναι κατακόρυφη αφού οι δυνάμεις που ασκήθηκαν στη ράβδο στη διάρκεια της κρούσης είναι κατακόρυφες, όπως και η ταχύτητα  $v_{cm}$  πριν την κρούση. Αλλά τότε:



$$v_{IA} = v_I + \omega_1 \frac{\ell}{2} \quad \text{και} \quad v_{IB} = \omega_1 \frac{\ell}{2} - v_I$$

και με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\omega_1 \ell = v_{IA} + v_{IB} = 4m / s = 2v_{cm}$$

οπότε και  $v_I = v_{IA} - \omega_1 \frac{\ell}{2} = 3m/s - 2m/s = 1m/s = \frac{1}{2} v_{cm}$ .

Η αρχική κινητική ενέργεια της ράβδου ήταν:

$$K_{\pi\rho} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} M \ell^2 \omega^2 = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{24} M (2v_{cm})^2 \rightarrow$$

$$K_{\pi\rho} = \frac{2}{3} M v_{cm}^2 \quad (1)$$

Η τελική κινητική ενέργεια είναι ίση:

$$K_{\mu\epsilon\tau} = \frac{1}{2} M v_I^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega_1^2 = \frac{1}{2} M v_I^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} M \ell^2 \omega_1^2 = \frac{1}{2} M \left( \frac{1}{2} v_{cm} \right)^2 + \frac{1}{24} M (2v_{cm})^2 \rightarrow$$

$$K_{\mu\epsilon\tau} = \frac{7}{24} M v_{cm}^2 \quad (2)$$

Προφανώς από (1) και (2)  $K_{\mu\epsilon\tau} < K_{\alpha\rho\chi}$  και κατά συνέπεια η κρούση είναι ανελαστική.

**Υλικό Φυσικής-Χημείας**

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

*Διονύσης Μάργαρης*