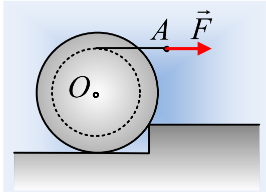
Ένας κυλινδρικός φλοιός σε ένα σκαλοπάτι.

1. Το σκαλοπάτι είναι λείο.



Ένας λεπτός κυλινδρικός φλοιός, μάζας M=20kg και ακτίνας R=50cm, φέρει σχισμή βάθους y=10cm, εντός της οποίας έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα. Το σώμα ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,5$, σε επαφή με λείο σκαλοπάτι, ύψους h=20cm. Σε μια στιγμή ασκούμε μια οριζόντια δύναμη F=20N στο άκρο A του νήματος χωρίς να κινηθεί ο φλοιός.

i) Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στον κυλινδρικό φλοιό.

ii) Αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή F_1=120N και παρατηρούμε ότι ο φλοιός περιστρέφεται, χωρίς να ανεβαίνει στο σκαλοπάτι. Για τη στιγμή που έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους l=1m:

α) Πόση είναι η κινητική ενέργεια του φλοιού;

β) Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η κινητική του ενέργεια;

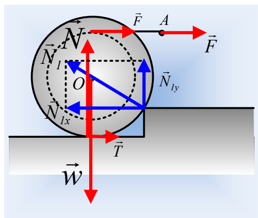
iii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα αυξάνοντας το μέτρο της ασκούμενης δύναμης στην τιμή F_3=300N με αποτέλεσμα το στερεό να ανέβει στο σκαλοπάτι.

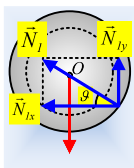
α) Να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση του κέντρου O, του κυλινδρικού φλοιού.

β) Ποια τιμή παίρνει ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του κέντρου O, στη θέση όπου το O απέχει κατά h_1=60cm από το οριζόντιο επίπεδο;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του φλοιού, ως προς τον άξονα περιστροφής του I= ½ mR^2 και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:





i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο φλοιό μας, μόλις τραβήξουμε ασκώντας δύναμη F, το άκρο του νήματος. Μέσω του νήματος ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου F στον φλοιό, το λείο σκαλοπάτι ασκεί δύναμη N_1, κάθετα στην επιφάνεια, η οποία περνά από το κέντρο O, ενώ επειδή λόγω της ροπής της F, ο φλοιός τείνει να περιστραφεί σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, εμφανίζεται στατική τριβή, με φορά προς τα δεξιά. Από την ισορροπία παίρνουμε:

$\Sigma F_x=0 \rightarrow F+T=N_{1x} \rightarrow F+T=N_1\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$ (1)

$\Sigma F_y=0 \rightarrow N+N_{1y}=w \rightarrow N+N_1\cdot\eta\mu\theta=Mg$ (2)

$\Sigma\tau_o=0 \rightarrow T\cdot R-F\cdot r=0$ (3)

Όπου r=R-y=0,4m, ενώ με βάση το 2ο σχήμα $\eta\mu\theta=\dfrac{R-h}{R}=\dfrac{0,5-0,2}{0,5}=0,6 \rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=0,8$.

Αλλά τότε από (3)

$$T=F\frac{r}{R}=20N\frac{0,4m}{0,5m}=16N\ .$$

οπότε από την (1):

$$N_1 = \frac{F+T}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{20+16}{0{,}8}N = 45N$$

Τέλος από την (2) παίρνουμε:

$$N = Mg - N_1 \cdot \eta\mu\theta = 200N - 45 \cdot 0{,}6N = 173N.$$

Αν υπολογίσουμε την οριακή τριβή $T_{o\rho}=\mu_s \cdot N=0{,}5 \cdot 173N=86{,}5N>>16N$, συνεπώς η στατική τριβή που παραπάνω υπολογίσαμε μπορεί να υπάρξει.

ii) Από τη στιγμή που ο φλοιός περιστρέφεται, χωρίς όμως να μεταφέρεται ισχύει ΣF=0 ή με άλλα λόγια ισχύουν ξανά οι εξισώσεις:

$\Sigma F_x=0 \rightarrow F+T=N_{1x} \rightarrow F+T=N_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ (1)

$\Sigma F_y=0 \rightarrow N+N_{1y}=w \rightarrow N+N_1 \cdot \eta\mu\theta=Mg$ (2)

Αλλά τώρα η τριβή, είναι τριβή ολίσθησης οπότε Τ=μ·Ν και με αντικατάσταση:

$$\left.\begin{array}{l} F+\mu N=N_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \\ N+N_1 \cdot \eta\mu\theta=Mg \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 120+0{,}5N=0{,}8 \cdot N_1 \\ N+0{,}6N_1=200 \end{array}\right\} \begin{array}{l} N_1=200N \\ N=80N \quad \kappa\alpha\iota \ T=40N \end{array}$$

α) Τη στιγμή που έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους l=1m και το σημείο εφαρμογής της τριβής έχει μετατόπιση 1m, οπότε με εφαρμογή του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας παίρνουμε:

$$K_\tau - K_{\alpha\rho\chi} = W_F + W_T + W_w + W_N + W_{N1} \rightarrow$$

Όπου $W_F=F \cdot \ell$. Αλλά αν Δφ η γωνία κατά την οποία στρέφεται στο μεταξύ ο κύλινδρος, ισχύει $\ell=\Delta\varphi \cdot r$, ενώ το έργο της τριβής θα είναι $W_T=-(T \cdot R) \cdot \Delta\varphi$

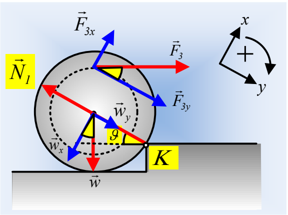
$$K_\tau = \frac{1}{2}I\omega^2 = F \cdot \ell - T \cdot R \cdot \frac{\ell}{r} = 120 \cdot 1J - 40 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{1}{0{,}4}J = 70J$$

β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας, τη παραπάνω στιγμή είναι:

$$\frac{dK}{dt} = (\Sigma\tau) \cdot \omega$$

Αλλά $\Sigma\tau= F \cdot r - T \cdot R$, ενώ $K_\tau = \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2K_\tau}{I}} = \sqrt{\frac{4K_\tau}{mR^2}}$, οπότε:

$$\frac{dK}{dt} = (\Sigma\tau) \cdot \omega = (Fr - TR) \cdot \sqrt{\frac{4K_\tau}{mR^2}} = (120 \cdot 0{,}4 - 40 \cdot 0{,}5) \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 70}{20 \cdot 0{,}5^2}} J/s = 56\sqrt{14} J/s$$



iii) Αφού ο φλοιός αρχίζει να ανεβαίνει στο σκαλοπάτι με την άσκηση της δύναμης F_3, δεν δέχεται πια δύναμη από το οριζόντιο επίπεδο, οπότε οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του είναι αυτές του σχήματος.

α) Εφαρμόζουμε τα 2^o νόμο του Νεύτωνα για την σύνθετη κίνηση του φλοιού, δουλεύοντας με τους άξονες x και y, όπου ο y έχει τη διεύθυνση της ακτίνας ΚΟ, με Κ το σημείο επαφής με το σκαλοπάτι. Με την επιλογή αυτή, η επιτάχυνση στη διεύθυνση του άξονα y είναι μηδενική :

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x=m\alpha_{cmx} \rightarrow F_{3x}-w_x=m\alpha_{cmx} \\ \Sigma F_y=m\alpha_{cmy} \rightarrow \Sigma F_y=0 \\ \Sigma\tau=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F_3\cdot\eta\mu\theta-mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta= m\alpha_{cmx} \quad (4) \\ \\ F_3\cdot r = ½\, mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (5) \end{array}$$

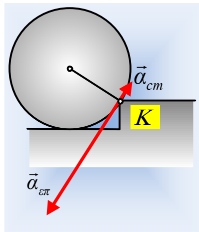
Από την σχέση (4) παίρνουμε:

$$\alpha_{cm}=\alpha_{cmx}=\frac{F_3\cdot\eta\mu\theta-mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{m}=\frac{300\cdot 0{,}6-200\cdot 0{,}8}{20}=1m/s^2.$$

Ενώ από την (5):

$$\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{2F_3\cdot r}{mR^2}=\frac{2\cdot 300\cdot 0{,}4}{20\cdot 0{,}5^2}rad/s^2=48rad/s^2.$$

Σχόλιο:

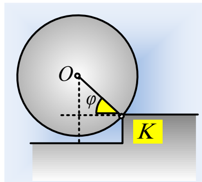


Αν υπολογίσουμε την επιτάχυνση του σημείου του φλοιού που έρχεται σε επαφή με το σκαλοπάτι, στο σημείο Κ, έχουμε ότι:

$$\alpha_K=\alpha_{\varepsilon\pi}-\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R-\alpha_{cm}=(24-1)m/s^2=23m/s^2,$$

όπως στο σχήμα, συνεπώς ο φλοιός ανεβαίνει στο σκαλοπάτι ενώ ταυτόχρονα «σπινάρει» και μάλιστα έντονα!

Μην θεωρήσει δηλαδή κάποιος, ότι ο φλοιός στρέφεται γύρω από το Κ, πράγμα που δεν συμβαίνει!!!



β) Την στιγμή που το κέντρο Ο απέχει κατά y=60cm από το οριζόντιο επίπεδο η κατάσταση είναι αυτή του διπλανού σχήματος, όπου για τη γωνία φ έχουμε:

$$\eta\mu\phi=\frac{h_1-h}{R}=\frac{60cm-20cm}{50cm}=0{,}8 \rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi=0{,}6.$$

Αλλά τότε από την εξίσωση (4) βρίσκουμε:

$$\alpha'_{cm}=\alpha'_{cmx}=\frac{F_3\cdot\eta\mu\phi-mg\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}{m}\rightarrow$$

$$\alpha'_{cm}=\frac{300\cdot 0{,}8-200\cdot 0{,}6}{20}m/s^2=6m/s^2.$$

Όπου η επιτάχυνση αυτή, είναι επιτρόχια (όπως και στο προηγούμενο ερώτημα). Προφανώς υπάρχει και κεντρομόλος, η οποία δεν μας απασχολεί εδώ.

Σχόλια:

1) Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι καθώς ανεβαίνει ο κυλινδρικός φλοιός η επιτάχυνση του κέντρου του αυξάνεται (από $1m/s^2$, φτάσαμε στα $6m/s^2$) πράγμα που σημαίνει ότι αν αρχίσει να ανυψώνεται, από εκεί και πέρα δεν πρόκειται να σταματήσει η άνοδος και θα συνεχίσει την άνοδο.

2) Αλλά από την εξίσωση (4) μπορούμε να βρούμε και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της δύναμης για την οποία ο φλοιός πρόκειται να αρχίσει την άνοδό του στο σκαλοπάτι. Αρκεί απλά $α_{cm}>0$ ή

$$F_3 \cdot ημθ - mg \cdot συνθ = mα_{cmx} > 0 \rightarrow$$

$$F_3 > \frac{mg \cdot συνθ}{ημθ} \rightarrow F_3 > 200N\,\frac{0,8}{0,6} \rightarrow F_3 > 266,7N$$

Αλλά τότε το ελάχιστο μέτρο της δύναμης, για το οποίο πετυχαίνουμε να ανέβει ο κυλινδρικός φλοιός στο σκαλοπάτι είναι οριακά 266,7N.

dmargaris@gmail.com