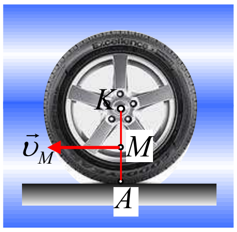
Ανακαλύπτοντας ξανά …τον τροχό.



Ένα φορτηγό κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δρόμο, με σταθερή ταχύτητα υ_φ, ενώ στο σχήμα βλέπετε έναν τροχό του ακτίνας R=0,5m. Το σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος, σημείο Α, έχει μηδενική ταχύτητα, ενώ το σημείο Μ, στο μέσον της ακτίνας ΚΑ, έχει ταχύτητα μέτρου υ_M=1m/s.

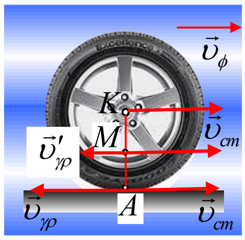
i) Το φορτηγό κινείται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά; Να δικαιολογήσετε αναλυτικά την απάντησή σας.

ii) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του φορτηγού και τη συχνότητα περιστροφής των τροχών.

iii) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σημείου Μ στην θέση που δείχνει το σχήμα.

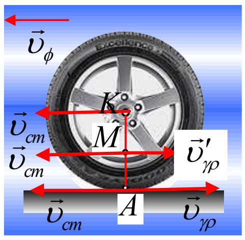
iv) Κάποια στιγμή το φορτηγό αποκτά επιτάχυνση α_φ=1m/s^2, χωρίς να ολισθήσουν οι τροχοί του. Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του ανώτερου σημείου του τροχού, τη στιγμή που το φορτηγό έχει αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon_{\varphi1}$=3m/s. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του παραπάνω σημείου, στη θέση αυτή;

Απάντηση:



i) Έστω ότι το φορτηγό κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ_φ. Τότε το κέντρο μάζας Κ του τροχού (πάνω στον άξονα των τροχών) έχει ταχύτητα $\upsilon_{cm}=\upsilon_\varphi$. Θεωρώντας την κίνηση του τροχού σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική με γωνιακή ταχύτητα ω, για να έχει μηδενική ταχύτητα το σημείο Α, το σημείο επαφής με το έδαφος, τότε ο τροχός στρέφεται σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού, με αποτέλεσμα η γραμμική ταχύτητα του Α, να είναι αντίθετη της ταχύτητα υ_{cm}. Για δε τα μέτρα τους θα ισχύει:

$$\upsilon_{cm}=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R \quad (1)$$



Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι αντίστοιχες ταχύτητες του σημείου Μ, οπότε:

$$\upsilon_M=\upsilon_{cm}-\upsilon'_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}-\omega\frac{R}{2}=\frac{\upsilon_{cm}}{2} \quad (2)$$

Με κατεύθυνση προς τα δεξιά, πράγμα άτοπο!

Συνεπώς το φορτηγό κινείται προς τα αριστερά και οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι αυτές του 2^{ου} σχήματος.

ii) Από την εξίσωση (2) (η σχέση προέκυψε για υποτιθέμενη κίνηση προς τα δεξιά, αλλά ίδια ισχύει και για κίνηση προς τα αριστερά, αφού είχαμε δουλέψει με τα μέτρα των ταχυτήτων) έχουμε:

$$\upsilon_M = \frac{\upsilon_{cm}}{2} \rightarrow \upsilon_{cm} = 2\upsilon_M = 2 \cdot 1m/s = 2m/s$$

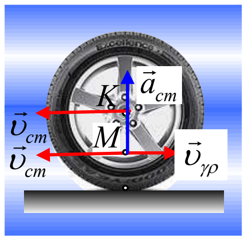
Ενώ από την (1) παίρνουμε:

$$\omega = \frac{\upsilon_{cm}}{R} = \frac{2}{0,5} rad/s = 4 rad/s$$

Έτσι το φορτηγό κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του άξονα του τροχού, δηλαδή υ_φ=2m/s, ενώ $\omega=2\pi f$, οπότε η συχνότητα περιστροφής του τροχού είναι:

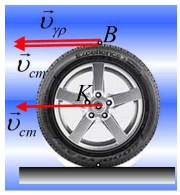
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} Hz = \frac{2}{\pi} Hz$$

iii) Το φορτηγό κινείται με σταθερή ταχύτητα, άρα το ίδιο συμβαίνει και με το κέντρο μάζας Κ του τροχού. Συνεπώς α_{cm}=0. Αλλά αφού δεν μεταβάλλεται η ταχύτητα του κέντρου μάζας, δεν μεταβάλλεται και η γωνιακή ταχύτητα (ο τροχός κυλίεται), οπότε και $\alpha_{\gamma\omega\nu}$=0. Συνεπώς η μόνη επιτάχυνση που έχει το σημείο Μ, είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση για την κυκλική του κίνηση γύρω από το Κ. Αυτή κατευθύνεται προς το Κ και έχει μέτρο:



$$\alpha_M = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}^2}{(KM)} = \omega^2 \cdot R_M = 4^2 \cdot 0,25 m/s^2 = 4m/s^2$$

iv) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες του ανώτερου σημείου Β του τροχού, η υ_{cm} λόγω μεταφορικής κίνησης και η $\upsilon_{\gamma\rho}$, εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης γύρω από το Κ. Αλλά αφού ο τροχός κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) $\upsilon_{cm}=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R$, οπότε:



$$\upsilon_B = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = 2\upsilon_{cm} = 2 \cdot 3m/s = 6m/s$$

Πάμε στην επιτάχυνση. Προφανώς την επιτάχυνση του φορτηγού, την έχει και ο άξονας του τροχού, συνεπώς $\alpha_{cm}=\alpha_\varphi=1m/s^2$. Αλλά τότε θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του τροχού, λόγω μεταφορικής κίνησης και το σημείο Β έχει την ίδια επιτάχυνση α_{cm}.

Αλλά αφού ο τροχός κυλίεται και λόγω επιταχυνόμενης μεταφορικής κίνησης αυξάνεται η ταχύτητα υ_{cm} θα αυξάνεται και η γωνιακή ταχύτητα, αφού θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση:

$$\upsilon_{cm}=\omega R$$

Πράγματι με παραγώγιση της παραπάνω σχέσης παίρνουμε:

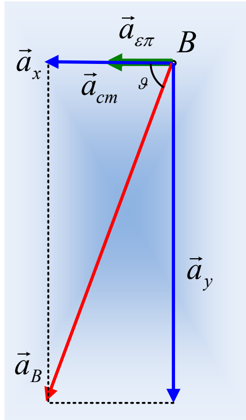
$$\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = a_{\gamma\omega\nu} R$$

Έτσι το σημείο Α έχει μια **επιτρόχια** επιτάχυνση, λόγω της επιταχυνόμενης κυκλικής κίνησης γύρω από το Κ, η οποία μεταβάλει το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας:

$$\frac{d\upsilon_{\gamma\rho}}{dt}=\frac{d(\omega R)}{dt}=\frac{d\omega}{dt}R=a_{\gamma\omega\nu}R=a_{cm}$$

Με βάση αυτά, στην οριζόντια διεύθυνση, το σημείο Β έχει επιτάχυνση:

$\alpha_x=\alpha_{cm}+\alpha_{\varepsilon\pi}=2\ \alpha_{cm}=2\ \alpha_{\varphi}=2m/s^2$.



Ενώ έχει και κατακόρυφη επιτάχυνση, την κεντρομόλο επιτάχυνση, με μέτρο:

$$\alpha_y=a_\kappa=\frac{\upsilon_{\gamma\rho}^2}{R}=\frac{\upsilon_{cm}^2}{R}=\frac{3^2}{0,5}m/s^2=18m/s^2.$$

Η ολική λοιπόν επιτάχυνση του σημείου Β, έχει μέτρο:

$$\alpha_B=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{2^2+18^2}m/s^2\approx 18,1m/s^2$$

Ενώ η κατεύθυνσή της σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ, όπου:

$$\varepsilon\varphi\vartheta=\frac{a_y}{a_x}=\frac{18}{2}=9$$

Με βάση την παραπάνω ανάλυση, η συνιστώσα α_x η οποία έχει την διεύθυνση της ταχύτητας, μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας, ενώ η συνιστώσα α_y μεταβάλει την κατεύθυνσή της. Οπότε ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας είναι:

$$\frac{d|\upsilon_B|}{dt}=a_x=2\,{}^{m/s}\!/_{s}$$

dmargaris@gmail.com