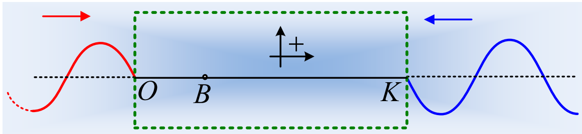
Κοιτάζοντας το παράθυρο, παρατηρούμε τα κύματα.



Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται με ταχύτητα υ=1m/s δύο κύματα και τη στιγμή $t_0=0$, φτάνουν στα σημεία Ο και Κ, στα άκρα ενός παραθύρου, με (ΟΚ)=4m, το οποίο αποτελεί την περιοχή παρατήρησής μας. Το πλάτος κάθε κύματος είναι Α=0,6m και το μήκος κύματος λ=2m.

i) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος, για κάθε κύμα, θεωρώντας τη θέση του σημείου Ο, ως αρχή του άξονα (x=0) και θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση.

ii) Μια σημειακή μάζα $dm=10^{-7}$kg, βρίσκεται στο σημείο Β, με $x_B=1$m. Να βρεθούν η κινητική της ενέργεια και η συνισταμένη δύναμη που δέχεται τις χρονικές στιγμές:

α) $t_1=1{,}25$s και β) $t_2=3{,}6$s.

iii) Να σχεδιάσετε τη μορφή του ελαστικού μέσου στο παραπάνω παράθυρο τη στιγμή $t_3=5$s.

Απάντηση:

i) Τα δυο κύματα διαδίδονται στο ίδιο μέσον, οπότε έχουν την ίδια ταχύτητα διάδοσης και συνεπώς έχουν και την ίδια περίοδο $\upsilon=\lambda\cdot f \rightarrow T=\frac{1}{f}=\frac{\lambda}{\upsilon}=\frac{2}{1}s=2s$. Εξάλλου το πρώτο κύμα (που διαδίδεται προς τα δεξιά) φτάνει στη θέση x=0, όπου το σημείο Ο αρχίζει να ταλαντώνεται προς τα πάνω (θετική κατεύθυνση), οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσή του ικανοποιεί την εξίσωση:

$$y_O=A\cdot\eta\mu\omega t=0{,}6\cdot\eta\mu(\pi t) \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

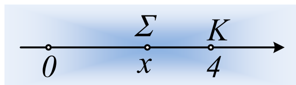
Οπότε η εξίσωση του κύματος παίρνει τη μορφή:

$$y_1=A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{2}\right) \text{ (μονάδες στο S.I.) με } t\geq 0 \text{ και } x\leq \upsilon t$$

Πάμε τώρα στο 2ο κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά. Το σημείο Κ στη θέση $x_K=4$m αρχίζει να ταλαντώνεται προς την αρνητική κατεύθυνση, οπότε η απομάκρυνσή του δίνεται από την εξίσωση:

$$y_K=A\cdot\eta\mu(\omega t+\pi)=0{,}6\cdot\eta\mu(\pi t+\pi) \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

Αλλά τότε το κύμα θα φτάσει σε ένα τυχαίο σημείο Σ, στη θέση x, μετά από χρόνο $t_1=\frac{d}{\upsilon}=\frac{4-x}{1}$ και η εξίσωση της απομάκρυνσής του θα είναι:



$$y_2=A\cdot\eta\mu(\omega(t-t_1)+\pi)=0{,}6\cdot\eta\mu(\pi(t-(4-x)+\pi)\rightarrow$$

$$y_2=0{,}6\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right) \text{ (μονάδες στο S.I.) με } t\geq 0 \text{ και } x\geq 4\text{-}t$$

ii) Το κύμα προς τα δεξιά φτάνει στο σημείο Β, τη στιγμή $t_{1,B}=\frac{x}{\upsilon}=\frac{1}{1}s=1s$ ενώ το κύμα προς τ' αριστερά τη στιγμή $t_{2,B}=\frac{4-x}{\upsilon}=\frac{4-1}{1}s=3s$. Αλλά τότε τη στιγμή t_1 το σημείο Β ταλαντώνεται μόνο εξαιτίας του πρώτου κύματος και η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι:

$$y_1 = 0{,}6 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{2}\right) = 0{,}6 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right) = 0{,}6 \cdot \eta\mu(\pi t - \pi) \text{ (S.I.)}$$

α) Τη στιγμή t_1 οι εξισώσεις για ταχύτητα και επιτάχυνση θα είναι:

$$\upsilon_1 = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{2}\right) = 0{,}6\pi \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right) = 0{,}6\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t - \pi) \text{ και}$$

$$a_1 = -\omega^2 A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{2}\right) = -0{,}6 \cdot \pi^2 \cdot \eta\mu(\pi t - \pi) \approx -6 \cdot \eta\mu(\pi t - \pi)$$

Με αντικατάσταση t_1=1,25s παίρνουμε:

$$\upsilon_1 = 0{,}6\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(1{,}25\pi - \pi) = 0{,}6\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}3\pi\sqrt{2} m/s \text{ και}$$

$$a_1 = -6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\sqrt{2} m/s^2$$

Οπότε για την σημειακή μάζα:

$$K_1 = \frac{1}{2} dm \cdot \upsilon_1^2 = \frac{1}{2} 10^{-7} \cdot \left(0{,}3\pi\sqrt{2}\right)^2 J = 9 \cdot 10^{-8} J \text{ και}$$

$$\Sigma F = dm \cdot a_1 = 10^{-7} \cdot \left(-3\sqrt{2}\right) m/s^2 = -3\sqrt{2} \cdot 10^{-7} N$$

Όπου το (-) σημαίνει ότι έχει φορά προς τα κάτω.

β) τη στιγμή t_2 το σημείο Β ταλαντώνεται εξαιτίας και των δύο κυμάτων ($t_2 > t_{2,B}$), οπότε από την αρχή της επαλληλίας για τη συμβολή των δύο κυμάτων παίρνουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 0{,}6 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{2}\right) + 0{,}6 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 2 \cdot 0{,}6 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{\frac{t}{2}-\frac{x}{2}-\frac{t}{2}-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right) \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{\frac{t}{2}-\frac{x}{2}+\frac{t}{2}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 1{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}\right) \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\right) = 1{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\pi x\right) \cdot \eta\mu\left(\pi t - \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 1{,}2 \cdot (-\eta\mu\pi x) \cdot (\sigma\upsilon\nu\pi t) = -1{,}2 \cdot \eta\mu\pi x \cdot \sigma\upsilon\nu\pi t \quad (1)$$

Θέτοντας στην (1) x=1m παίρνουμε:

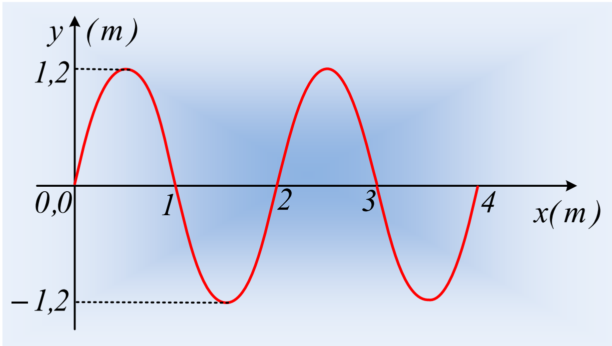
$$y = -1{,}2 \cdot \eta\mu\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\pi t = 0$$

Το σημείο Β δηλαδή δεν ταλαντώνεται μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων συνεπώς και τη στιγμή t_2, θα έχουμε για τη σημειακή μάζα K_2=0 και ΣF=0!

iii) Τη στιγμή t_3=5s, σε όλο το «παράθυρο» έχουμε συμβολή των δύο κυμάτων, αφού η περιοχή «καλύπτεται» σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{(OK)}{\upsilon} = 4s$. Έτσι με αντικατάσταση στην (1) t=t_3 παίρνουμε:

$$y = -1{,}2 \cdot \eta\mu\pi x \cdot \sigma\upsilon\nu\pi t = -1{,}2 \cdot \eta\mu\pi x \cdot \sigma\upsilon\nu(5\pi) = 1{,}2 \cdot \eta\mu\pi x$$

Με γραφική παράσταση, όπως στο σχήμα:



Σχόλιο:

Σε όλη την παραπάνω αποδεικτική πορεία αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα, σαν ένα πρόβλημα συμβολής.

Με όρους «στάσιμου κύματος», θα μιλάγαμε για δεσμούς στις θέσεις x=0, 1, 2, 3 και 4m, οπότε προφανώς το σημείο Β είναι σε θέση δεσμού και παραμένει ακίνητο…

dmargaris@gmail.com