

Δυναμικό και ένταση στο βαρυτικό πεδίο της Γης.

Δίνεται η ακτίνα της Γης $R_{\Gamma}=6.400\text{km}$, ενώ το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια της είναι $g_0=10\text{m/s}^2$.

- i) Να βρείτε το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Γης:
 - α) στην επιφάνεια της Γης,
 - β) σε ένα σημείο P που βρίσκεται σε ύψος $h = 3R_{\Gamma}$ από την επιφάνεια της Γης, με δεδομένο ότι το δυναμικό είναι μηδέν σε άπειρη απόσταση από τη Γη.
- ii) Να βρείτε το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στα σημεία A και B αν τα αντίστοιχα δυναμικά έχουν τιμές $V_A = -48 \cdot 10^6 \text{J/kg}$ και $V_B = -32 \cdot 10^6 \text{J/kg}$.
- iii) Ένα σώμα Σ μάζας 2kg, αφήνεται σε ένα από τα παραπάνω σημεία (A ή B) και μετά από ορισμένο χρόνο φτάνει στο άλλο. Αν οι αντίσταση του αέρα θεωρηθεί αμελητέα:
 - α) Σε ποιο σημείο αφέθηκε, στο A ή στο B;
 - β) Να υπολογιστεί το έργο του βάρους κατά την παραπάνω μετακίνηση.
 - γ) Η ισχύς του βάρους τη στιγμή που φτάνει στο δεύτερο σημείο.

Απάντηση:

- i) Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας (ίσο με το αντίστοιχο μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας), σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης ισχύει:

$$g = \frac{F}{m} = G \frac{M_{\Gamma}}{(R_{\Gamma} + h)^2} \quad (1)$$

Όπου στην επιφάνεια της Γης θα έχουμε αντίστοιχα $g_0 = G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} \rightarrow GM_{\Gamma} = g_0 R_{\Gamma}^2$ (2)

Εξάλλου για το δυναμικό σε ύψος h έχουμε $V = -G \frac{M_{\Gamma}}{r} = -G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}$ (3). Με βάση αυτά:

- α) Στην επιφάνεια της Γης, όπου $h=0$, έχουμε:

$$V_{\Gamma} = -G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}} = -\frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma}} = -g_0 R_{\Gamma} \quad \text{ή}$$

$$V_{\Gamma} = -10 \cdot 6.400 \cdot 10^3 = -64 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

- β) Στο σημείο P, σε ύψος $h=3R_{\Gamma}$ θα έχουμε:

$$V_P = -G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h} = -\frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{4R_{\Gamma}} = -\frac{1}{4} g_0 R_{\Gamma} \quad \text{ή}$$

$$V_P = -\frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 6.400 \cdot 10^3 = -16 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

- ii) Από την (3) παίρνουμε $V = -G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h} \rightarrow R_{\Gamma} + h = -\frac{GM_{\Gamma}}{V} = -\frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{V}$ και με αντικατάσταση στην (1)

παίρνουμε:

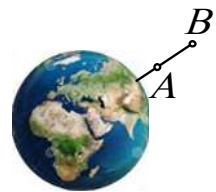
$$g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{GM_T}{\left(\frac{g_0 R_T^2}{V}\right)^2} = \frac{V^2}{g_0 R_T^2}$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$g_A = \frac{V_A^2}{g_0 R_T^2} = \frac{(48 \cdot 10^6)^2}{10 \cdot (64 \cdot 10^5)^2} \text{ N/kg} = \frac{3^2 \cdot 16^2 \cdot 10^{12}}{4^2 \cdot 16^2 \cdot 10^{11}} \text{ N/kg} = \frac{45}{8} \text{ N/kg}$$

$$g_B = \frac{V_B^2}{g_0 R_T^2} = \frac{(32 \cdot 10^6)^2}{10 \cdot (64 \cdot 10^5)^2} \text{ N/kg} = \frac{2^2 \cdot 16^2 \cdot 10^{12}}{4^2 \cdot 16^2 \cdot 10^{11}} \text{ N/kg} = 2,5 \text{ N/kg}$$

iii) Με βάση τις τιμές της έντασης, που παραπάνω υπολογίσαμε, η ένταση του βαρυντικού πεδίου είναι μικρότερη στο σημείο Β, συνεπώς το Β βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από τη Γη, από ότι το σημείο Α. Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούσαμε να καταλήξουμε και με βάση τις τιμές του δυναμικού. Όσο πιο ψηλά βρίσκεται ένα σημείο, τόσο μεγαλύτερο είναι το δυναμικό και $V_B > V_A$.



α) Αλλά τότε το σώμα Σ πρέπει να αφηθεί στο Β και να φτάσει στο Α. Βέβαια για να συμβεί αυτό, τα δυο σημεία βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη, όπως στο σχήμα.

β) Για το έργο του βάρους έχουμε:

$$W_{B \rightarrow A} = m(V_B - V_A) = 2 \cdot (-32 \cdot 10^6 - (-48 \cdot 10^6)) \text{ J} = 32 \cdot 10^6 \text{ J}$$

γ) Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ για το σώμα για τη μετακίνησή του από το Β στο Α, παίρνουμε:

$$K_A - K_B = W_{B \rightarrow A} \rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 - 0 = W_{B \rightarrow A} \rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2W_{B \rightarrow A}}{m}} \rightarrow$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2W_{B \rightarrow A}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 32 \cdot 10^6}{2}} \text{ m/s} = 16\sqrt{2} \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Αλλά τότε η ισχύς του βάρους, ο ρυθμός με τον οποίο η δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική, είναι ίσος:

$$P_w = \frac{dW_w}{dt} = \frac{mg \cdot dy}{dt} = mgv_A = 2 \cdot 2,5 \cdot 16\sqrt{2} \cdot 10^3 \text{ W} = 80\sqrt{2} \cdot 10^3 \text{ W}$$

dmargaris@gmail.com