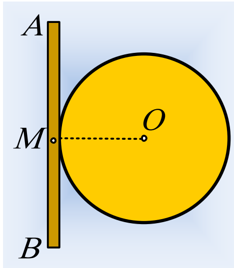
Η ράβδος στο «πλευρό» του δίσκου.



Ο ξύλινος δίσκος του σχήματος μάζας (56/9)kg και ακτίνας R=0,3m, μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται από το κέντρο του Ο. Καρφώνουμε στο άκρο μιας ακτίνας του δίσκου, το μέσον Μ μιας ομογενούς ράβδου ΑΒ μάζας 12kg και μήκους 0,8m, κατασκευάζοντας έτσι το στερεό s. Αφήνουμε το στερεό s ελεύθερο να κινηθεί από τη θέση, όπου η ράβδος ΑΒ είναι κατακόρυφη, όπως στο σχήμα.

i) Για τη στιγμή αμέσως μόλις αφέθηκε το στερεό να κινηθεί, να βρεθούν:

α) Η γωνιακή επιτάχυνση του s.

β) Οι επιταχύνσεις των άκρων Α και Β της ράβδου.

γ) Οι ρυθμοί μεταβολής της στροφορμής, ως προς τον άξονα περιστροφής στο Ο:

a) του στερεού s, b) του δίσκου, c) της ράβδου.

ii) Για τη στιγμή που η ράβδος γίνεται οριζόντια για πρώτη φορά, να βρεθούν:

α) Οι ταχύτητες των άκρων Α και Β της ράβδου.

β) Η στροφορμή της ράβδου ως προς:

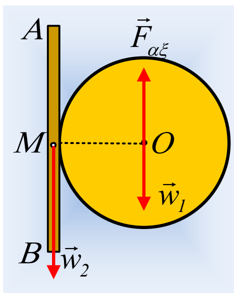
a) Τον άξονα περιστροφής στο Ο,

b) Οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο του σχήματος, ο οποίος περνά από το μέσον της Μ.

γ) Η κινητική ενέργεια της ράβδου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_1= ½\ m_1R^2$, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της Μ $I_2= (1/12)m_2l^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό s, μόλις αφεθεί να κινηθεί (δεν ασχολούμαστε με τις εσωτερικές δυνάμεις που ασκεί ο δίσκος στη ράβδο και αντίστροφα, αφού δεν μας ενδιαφέρουν. Σημασία έχουν οι δυνάμεις που το περιβάλλον ασκεί στο στερεό s). Η $F_{\alpha\xi}$ είναι η δύναμη που ασκεί στο στερεό s, ο άξονας και η οποία είναι κατακόρυφη. (Θα μπορούσε κάποιος να την σχεδιάσει με τυχαία διεύθυνση αν δεν γνωρίζει τη διεύθυνση και αν του ζητηθεί, στη συνέχεια να βρει τα χαρακτηριστικά της).

α) Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση του s, γύρω από τον άξονα στο Ο, θεωρώντας την αντιωρολογιακή φορά ως θετική, παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_O=I_{s,O}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

Όπου για τη ροπή αδράνειας του s, έχουμε ότι $I_{s,O}=I_{\delta,O}+I_{\rho,O}$, όπου:

$$I_{\delta,O}=\frac{1}{2}m_1R^2=\frac{1}{2}\frac{56}{9}\cdot 0{,}3^2\,kg\cdot m^2=0{,}28kg\cdot m^2.$$

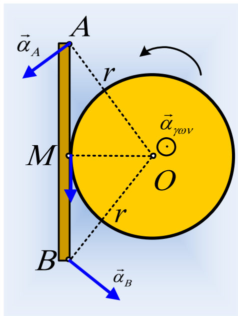
$$I_{\rho,O}=I_{cm}+m_2R^2=\frac{1}{12}m_2\ell^2+m_2R^2\rightarrow$$

$$I_{\rho,O}=\frac{1}{12}12\cdot 0{,}8^2\,kg\cdot m^2+12\cdot 0{,}3^2\,kg\cdot m^2=1{,}72kg\cdot m^2.$$

Οπότε: $I_{s,O}=0{,}28kg\cdot m^2+1{,}72kg\cdot m^2=2kg\cdot m^2$

$$w_2R=I_{s,O}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\rightarrow\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{m_2gR}{I_{s,O}}\rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{m_2gR}{I_{s,O}}=\frac{12\cdot 10\cdot 0{,}3}{2}rad/s^2=18rad/s^2.$$



Κάθετη στο επίπεδο με φορά προς τον αναγνώστη, όπως στο σχήμα.

β) Τα σημεία A και B ισαπέχουν από τον άξονα, η δε απόστασή τους βρίσκεται με τη βοήθεια του Π.Θ.:

$$r=\sqrt{(AM)^2+(MO)^2}=\sqrt{0{,}4^2+0{,}3^2}\,m=0{,}5m$$

Αλλά τότε τα σημεία αυτά έχουν επιτρόχιες επιταχύνσεις κάθετες στις ακτίνες, όπως στο σχήμα, με μέτρα:

$$\alpha_A=\alpha_B=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot r=18\cdot 0{,}5m/s^2=9m/s^2.$$

γ) Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής στο O, έχουμε:

$$\frac{dL}{dt}=\frac{d(I_O\omega)}{dt}=I_O\frac{d\omega}{dt}=I_O\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}.$$ Έτσι:

a) Για το στερεό s: $\frac{dL_s}{dt}=I_{s,O}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}=2\cdot 18\,{kgm^2}/{s^2}=36\,{kgm^2}/{s^2}$.

b) Για το δίσκο: $\frac{dL_s}{dt}=I_{\delta,O}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}=0{,}28\cdot 18\,{kgm^2}/{s^2}=5{,}04\,{kgm^2}/{s^2}$.

c) Για τη ράβδο: $\frac{dL_\rho}{dt}=I_{\rho,O}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}=1{,}72\cdot 18\,{kgm^2}/{s^2}=30{,}96\,{kgm^2}/{s^2}$.

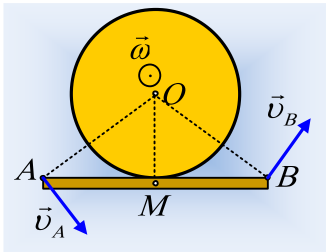
Οι παραπάνω ρυθμοί είναι διανύσματα πάνω στον άξονα περιστροφής με φορά προς τα έξω, ίδια με την κατεύθυνση της γωνιακής επιτάχυνσης.

ii) Θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την θέση της ράβδου τη στιγμή που είναι οριζόντια, παίρνουμε με εφαρμογή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το στερεό s:

$$U_{\delta,\alpha\rho\chi} + U_{\rho,\alpha\rho\chi} = U_{\delta,\tau\varepsilon\lambda} + U_{\rho,\tau\varepsilon\lambda} + K_s \rightarrow$$

$$U_{\delta,\alpha\rho\chi} + m_2 gR = U_{\delta,\tau\varepsilon\lambda} + 0 + \frac{1}{2} I_{s,O}\omega^2 \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2m_2 gR}{I_{s,O}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 12\cdot 10\cdot 0{,}3}{2}} rad/s = 6 rad/s$$



α) Στην θέση αυτή οι ταχύτητες των άκρων της ράβδου, κάθετες στις αντίστοιχες ακτίνες, όπως στο σχήμα, έχουν μέτρα:

$$\upsilon_A = \upsilon_B = \omega\cdot r = 6\cdot 0{,}5 m/s^2 = 3 m/s.$$

β) Για τη στροφορμή της ράβδου, διάνυσμα με διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα έξω, έχουμε:

a) Ως προς τον άξονα που περνά από το Ο:

$$L_{O,\rho} = I_{\rho,O}\cdot\omega = 1{,}72\cdot 6 kgm^2/s = 10{,}32 kgm^2/s.$$

b) Ως προς οριζόντιο άξονα που περνά από το Μ (κέντρο μάζας της ράβδου):

$$L_{M,\rho} = I_{cm}\cdot\omega = \frac{1}{12} m_2 \ell^2 \omega = \frac{1}{12} 12\cdot 0{,}8^2\cdot 6 kgm^2/s = 3{,}84 kgm^2/s.$$

γ) Η ράβδος στρέφεται γύρω από το Ο, έχοντας κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} I_{O,\rho}\cdot\omega^2 = \frac{1}{2} 1{,}72\cdot 6^2 J = 30{,}96 J$$

Σχόλια:

Η κίνηση της ράβδου μπορεί να θεωρηθεί σύνθετη. Μια μεταφορική, όπου το κέντρο μάζας διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας R και μια στροφική γύρω από το Μ. Αν την δούμε έτσι, τότε θα έχουμε:

i) Για τη στροφορμή:

$$L_{O,\rho} = m_2 \upsilon_M R + I_{cm}\cdot\omega = 12\cdot(6\cdot 0{,}3) 0{,}3 kgm^2/s + 0{,}64\cdot 6 kgm^2/s = 10{,}32 kgm^2/s.$$

ii) Για την κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} m_2 \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\cdot\omega^2 = \frac{1}{2} m_2 (\omega R)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12} m_2 \ell^2\cdot\omega^2 \rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2} 12 (6\cdot 0{,}3)^2 J + \frac{1}{2}\frac{1}{12} 12\cdot 0{,}8^2\cdot 6^2 J = 30{,}96 J$$

dmargaris@gmail.com