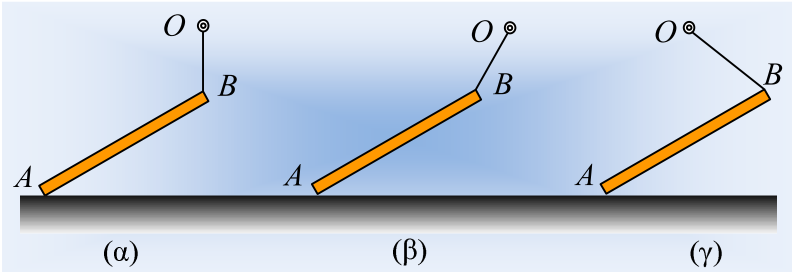
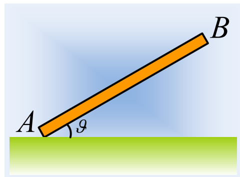
Μια ράβδος κρέμεται και μετά γλιστράει

Μια ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους 2m και μάζας 4kg, κρέμεται μέσω νήματος, το οποίο δένεται στο άκρο της Β, από σταθερό σημείο Ο, ενώ στηρίζεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο (1) με το άκρο της Α.



i) Σε ποια ή σε ποιες από τις παραπάνω θέσεις μπορεί να ισορροπεί η ράβδος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας, εξηγώντας και την ισορροπία και τη μη ισορροπία, για κάθε περίπτωση.

ii) Η ράβδος αυτή τοποθετείται σε άλλο οριζόντιο επίπεδο (2) με το οποίο σχηματίζει γωνία θ, και αφήνεται να πέσει, ξεκινώντας από την ηρεμία. Αν το άκρο της Α μετατοπισθεί κατά 0,2m, μέχρι που το άκρο Β να φτάσει στο επίπεδο:



α) Να αποδείξετε ότι το επίπεδο (2) είναι λείο.

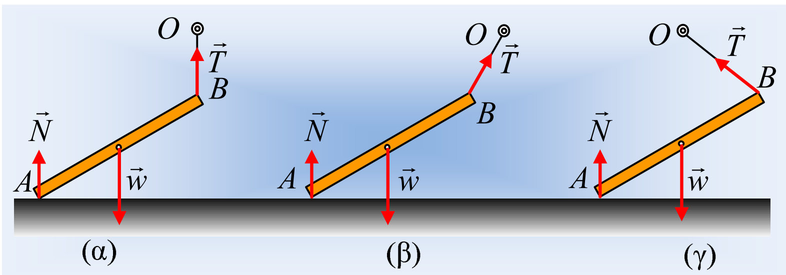
β) Να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση του άκρου Α.

γ) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια της ράβδου τη στιγμή που γίνεται οριζόντια (που το άκρο Β φτάνει στο επίπεδο…).

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I = 1/12\ Ml^2$, $g=10m/s^2$, ενώ συνθ=0,8 και ημθ=0,6.

Απάντηση:

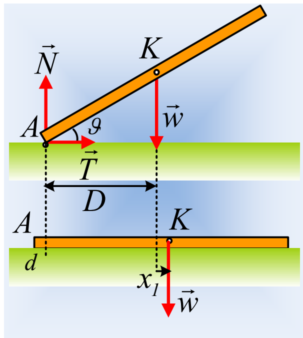
i) Η ράβδος στο σχήμα (α) μπορεί να ισορροπεί, ενώ δεν μπορούν να ισορροπούν οι ράβδοι στα δύο επόμενα σχήματα.



Για να ισορροπεί ένα στερεό πρέπει $\Sigma\vec{F} = 0$. Αλλά αυτό μπορεί να συμβαίνει στο (α) σχήμα που οι τρεις δυνάμεις είναι κατακόρυφες, οπότε μπορεί να ισχύει T+N=w.

Στα δύο επόμενα σχήματα, βάρος και κάθετη αντίδραση Ν είναι κατακόρυφες, αλλά η τάση του νήματος έχει άλλη διεύθυνση. Αλλά τότε δεν μπορεί η συνισταμένη να είναι μηδενική, αφού αρκεί να σκεφτούμε ότι υπάρχει οριζόντια συνιστώσα της τάσης του νήματος, οπότε $\Sigma F_x \neq 0$.

ii) Έστω ότι το επίπεδο **δεν** είναι λείο. Τότε στη ράβδο ασκείται δύναμη τριβής, όπως στο σχήμα, προσδίνοντας και μια οριζόντια επιτάχυνση, στο κέντρο μάζας Κ της ράβδου, με αποτέλεσμα, τη στιγμή που φτάνει στο επίπεδο, να έχει κάποια μετατόπιση x_1, όπως στο δεύτερο σχήμα.



α) Αλλά με βάση το πάνω σχήμα:

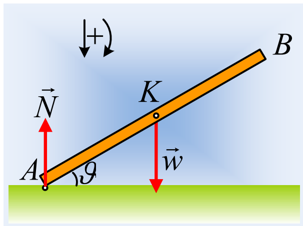
$$D = (AK)\cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\ell}{2}\cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 0{,}8m$$

Ενώ στο κάτω σχήμα:

$$d+D+x_1=(AK) \rightarrow x_1=(AK)-d-D=1m-0{,}2m-0{,}8m=0$$

πράγμα που σημαίνει ότι το κέντρο μάζας δεν μετατοπίσθηκε οριζόντια. Αλλά αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι η ράβδος στη διάρκεια της πτώσης δεν δέχτηκε καμιά οριζόντια δύναμη, συνεπώς το επίπεδο (2) είναι λείο.

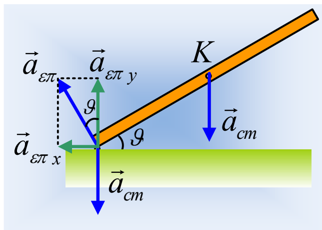
β) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο μόλις αφεθεί να κινηθεί. Θεωρώντας ότι η κίνησή της είναι σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το μέσον Κ της ράβδου, παίρνουμε:



$$\Sigma F=m\cdot \alpha_{cm} \rightarrow Mg-N=M\cdot \alpha_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma\tau=I\cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow N\cdot(AK)\cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{12}M\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$N\cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{6}M\ell\cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$



Αλλά αν έρθουμε στην επιτάχυνση του άκρου Α, αυτή θα είναι οριζόντια, οπότε με βάση το διπλανό σχήμα, θα έχουμε:

$$\alpha_{\varepsilon\pi y}=\alpha_{cm} \rightarrow \alpha_{\varepsilon\pi}\cdot \sigma\upsilon\nu\theta=\alpha_{cm} \text{ ή } a_{\gamma\omega\nu}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot \sigma\upsilon\nu\theta = a_{cm} \quad (3)$$

Με αντικατάσταση στην (1) λόγω (3) έχουμε:

$Mg - N = Ma_{\gamma\omega\nu}\dfrac{\ell}{2}\cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ (1^{α}), οπότε με πρόσθεση με (2) παίρνουμε:

$$a_{\gamma\omega\nu}\frac{\ell}{2} = \frac{g}{\sigma\upsilon\nu\theta + \dfrac{1}{3\sigma\upsilon\nu\theta}} \rightarrow$$

$$a_A = a_{\varepsilon\pi x} = a_{\varepsilon\pi}\cdot \eta\mu\theta = a_{\gamma\omega\nu}\frac{\ell}{2}\eta\mu\theta \rightarrow$$

$$a_A = \frac{g}{\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{1}{3\sigma\upsilon\nu\theta}} \cdot \eta\mu\theta \approx 4{,}9m/s^2$$

γ) Από τη στιγμή που δεν εμφανίζονται τριβές η μηχανική ενέργεια διατηρείται, οπότε δουλεύοντας για τη θέση της ράβδου, αμέσως μόλις αφήνεται να κινηθεί και τη θέση που γίνεται οριζόντια στο έδαφος, παίρνουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$Mgh+0=0+K_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = Mg \cdot \frac{\ell}{2}\eta\mu\theta = 4 \cdot 10 \cdot \frac{2}{2} \cdot 0{,}6J = 24J$$

dmargaris@gmail.com