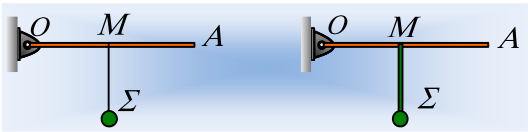
Με αβαρές νήμα ή με αβαρή ράβδο

Μια ομογενής ράβδος ΟΑ μάζας m και μήκους l μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Ο.

Α) Από το μέσον της ράβδου κρέμεται μέσω αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους ½ l ένα σώμα Σ της ίδιας μάζας m, το οποίο θεωρείται υλικό σημείο.

Β) Το ίδιο σώμα Σ, κρέμεται από το μέσον της ράβδου, μέσω αβαρούς ράβδου μήκους ½ l, όπως στο 2ο σχήμα, όπου η αβαρής ράβδος είναι κολλημένη στο Μ και συνεχώς κάθετη στη ράβδο ΟΑ.



Και στις δυο περιπτώσεις η ράβδος αφήνεται να κινηθεί από την οριζόντια θέση.

i) Για τις αρχικές γωνιακές επιταχύνσεις που αποκτά στις δυο περιπτώσεις η ράβδος ΟΑ ισχύει:

α) $α_{γων,1}<α_{γων,2}$, β) $α_{γων,1} = α_{γων,2}$, γ) $α_{γων,1} > α_{γων,2}$.

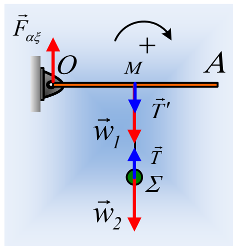
ii) Για τα μέτρα των αρχικών επιταχύνσεων του σώματος Σ ισχύει:

α) $α_1<α_2$, β) $α_1=α_2$, γ) $α_1>α_2$.

iii) Να σχεδιάστε στο σχήμα, τις αρχικές επιταχύνσεις του σώματος Σ.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I= ml^2/3$.

Απάντηση:



i) Στο πρώτο σχήμα που το σώμα Σ κρέμεται με νήμα, έχουμε ένα **σύστημα** σωμάτων, που αποτελείται από μια ράβδο και ένα υλικό σημείο, ενώ οι ασκούμενες δυνάμεις έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα. Το ερώτημα είναι το νήμα θα μείνει τεντωμένο ή όχι; Αν είναι τεντωμένο τότε το μέσον Μ της ράβδου και το υλικό σημείο Σ κινούνται με την ίδια επιτάχυνση, επιτάχυνση και κάθε άλλου σημείου του νήματος.

Έστω ότι δεν συμβαίνει αυτό και το νήμα χαλαρώνει, οπότε τα δυο σώματα κινούνται ανεξάρτητα.

Τότε το σώμα Σ με την επίδραση του βάρους αποκτά επιτάχυνση $g=10m/s^2$, ενώ για τη ράβδο έχουμε:

Ράβδος: $$Στ_o=I_o\cdot α_{γων,1} \rightarrow w_1\frac{\ell}{2}=\left(\frac{1}{3}m\ell^2\right)\cdot α_{γων,1}\rightarrow$$

$$mg\frac{1}{2}=\frac{1}{3}m\ell\cdot α_{γων,1}\rightarrow α_{γων,1}=\frac{3g}{2\ell}$$

Οπότε το μέσον Μ της ράβδου επιταχύνεται προς τα κάτω με επιτάχυνση:

$$α_M=α_{γων,1}\cdot\frac{\ell}{2}=\frac{3g}{2\ell}\cdot\frac{\ell}{2}=\frac{3}{4}g$$

Έχουμε δηλαδή ένα νήμα που το κάτω άκρο του επιταχύνεται γρηγορότερα από το πάνω. Αυτό σημαίνει ότι το νήμα τεντώνεται και η υπόθεσή μας κατέληξε σε άτοπο.

Ξαναπαίρνουμε λοιπόν το 2^o νόμο για κάθε σώμα και έχουμε:

Ράβδος: $\Sigma\tau_o = I_o \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow w_1 \cdot \frac{\ell}{2} + T' \cdot \frac{\ell}{2} = \left(\frac{1}{3}m\ell^2\right) \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow$

$$mg + T' = \frac{2}{3}m\ell \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \quad (1)$$

Σώμα Σ: $\Sigma F = m \cdot \alpha_\Sigma \rightarrow mg - T = m \cdot \alpha_\Sigma$ (2)

Αλλά T=T΄ ενώ $\alpha_{\gamma\omega\nu,1} \cdot \frac{\ell}{2} = \alpha_\Sigma$ (3) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε:

$$2mg = \frac{7}{6}m \cdot \ell \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{12g}{7\ell} \quad (4)$$

Ερχόμαστε στο δεύτερο σχήμα. Τώρα έχουμε ένα **στερεό**, αφού η αβαρής ράβδος διατηρεί σε σταθερές αποστάσεις ράβδο και σώμα Σ. Η ροπή αδράνειας του στερεού αυτού ως προς τον άξονα περιστροφής στο Ο, είναι:

$$I_o = I_{o,\rho} + I_{o,\Sigma} = \frac{1}{3}m\ell^2 + md^2$$

Όπου $d^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{2}$, οπότε

$$\Sigma\tau_o = I_o \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,2} \rightarrow w_1 \cdot \frac{\ell}{2} + w_2 \cdot \frac{\ell}{2} = \left(\frac{1}{3}m\ell^2 + md^2\right) \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,2} \rightarrow$$

$$mg \cdot \frac{\ell}{2} + mg \cdot \frac{\ell}{2} = \left(\frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\right) \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,2} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{6g}{5\ell} = \frac{12g}{10\ell} \quad (5)$$

Από την σύγκριση των τιμών στις (4) και (5) προκύπτει ότι $\alpha_{\gamma\omega\nu,1} > \alpha_{\gamma\omega\nu,2}$. Σωστό το γ).

ii) Στο πρώτο σχήμα, το σώμα Σ έχει την ίδια επιτάχυνση με το μέσον Μ της ράβδου με μέτρο:

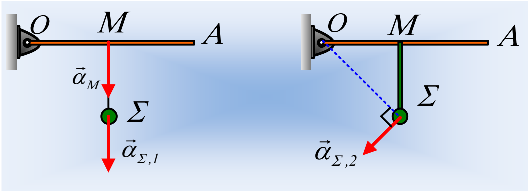
$$\alpha_{\Sigma,1} = \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{12g}{7\ell} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{6}{7}g$$

Η επιτάχυνση του Σ στο δεύτερο σχήμα είναι επιτρόχιος με μέτρο:

$$\alpha_{\Sigma,2} = \alpha_{\gamma\omega\nu,2} \cdot d = \frac{6g}{5\ell} \cdot \frac{\ell}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{10}g$$

Οπότε $\alpha_{\Sigma,1} > \alpha_{\Sigma,2}$ και σωστό το γ)

iii) Στο παρακάτω σχήμα τα διανύσματα των δύο παραπάνω επιταχύνσεων του σώματος Σ. Στο πρώτο σχήμα η επιτάχυνση είναι κατακόρυφη, ενώ στο δεύτερο κάθετη στην ακτίνα d του κύκλου, που διαγράφει το Σ, ή αν προτιμάτε σχηματίζει γωνία 45° με την κατακόρυφη. Γιατί;



dmargaris@gmail.com