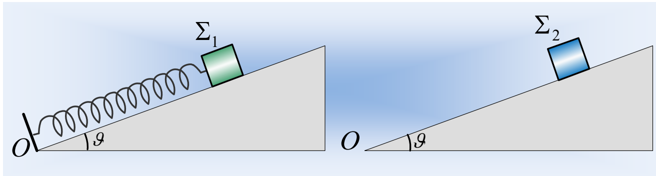
Δυο σώματα αφήνονται να κινηθούν.



Δυο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$, ίδιας μάζας m=2kg, συγκρατιόντιαι σε λείο κεκλιμένο επίπεδο απέχοντας κατά D=1,5m από την κορυφή του Ο. Το $Σ_1$ είναι δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=20N/m με φυσικό μήκος l_0=1,2m, το άλλο άκρο του οποίου δένεται σε στήριγμα στη βάση του επιπέδου, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή (t_0=0) αφήνουμε ταυτόχρονα τα σώματα να κινηθούν.

i) Να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση κάθε σώματος.

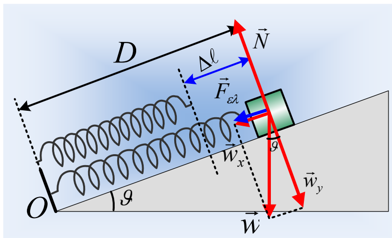
ii) Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των σωμάτων, τη στιγμή t_1 που αποκτούν ίσες επιταχύνσεις για πρώτη φορά.

iii) Πόσο απέχει κάθε σώμα από την κορυφή Ο του επιπέδου τη στιγμή t_2 που μηδενίζεται για πρώτη φορά η ταχύτητα του σώματος $Σ_1$;

iv) Να παρασταθεί γραφικά η ταχύτητα κάθε σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη στιγμή t_2, στο ίδιο διάγραμμα.

Το κεκλιμένο επίπεδο έχει κλίση θ, με ημθ=0,3, η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/s^2 και $π^2$≈10.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα $Σ_1$ (οι ίδιες δυνάμεις, εκτός της δύναμης του ελατηρίου ασκούνται και στο σώμα $Σ_2$). Στην αρχική θέση το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell = D - \ell_0 = 1{,}5m - 1{,}2m = 0{,}3m$, συνεπώς η δύναμη του ελατηρίου, με φορά προς τα κάτω έχει μέτρο:

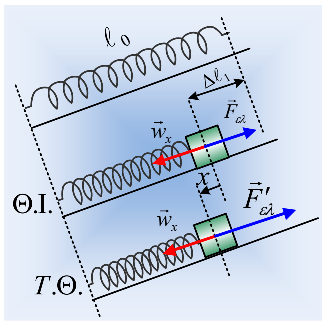
$$F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta\ell = 20 \cdot 0{,}3N = 6N\,.$$

Από το 2^o νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

Για το $Σ_1$: $ΣF_{x1}=mα_1 \rightarrow a_1 = \dfrac{mg\eta\mu\theta + F_{\varepsilon\lambda}}{m} = g\eta\mu\theta + \dfrac{F_{\varepsilon\lambda}}{m} = \left(10 \cdot 0{,}3 + \dfrac{6}{2}\right)m/s^2 = 6m/s^2$.

Για το $Σ_2$: $ΣF_{x2}=mα_2 \rightarrow a_2 = \dfrac{mg\eta\mu\theta}{m} = g\eta\mu\theta = 3m/s^2$.

ii) Το σώμα $Σ_2$ κινείται με σταθερή επιτάχυνση $α_2$ εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.



iii) Αντίθετα το σώμα $Σ_1$ έχει μεταβλητή επιτάχυνση, αφού μεταβάλλεται η δύναμη του ελατηρίου. Έτσι στη θέση που το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος, το $Σ_1$ θα έχει την ίδια επιτάχυνση με το $Σ_2$.

Ναι αλλά τι κίνηση εκτελεί το σώμα $Σ_1$; Προφανώς η κίνηση είναι ΑΑΤ, αλλά δεν αφήνεται να εννοηθεί από την εκφώνηση, συνεπώς θα χρειαστεί απόδειξη… Πάμε με βάση το διπλανό σχήμα:

Παίρνουμε το σώμα $Σ_1$ στη θέση ισορροπίας του, όπου:

$$\Sigma F_x=0 \text{ ή } w_x=k\cdot\Delta\ell_1 \quad (1)$$

Στην τυχαία θέση έχουμε:

$$\Sigma F_x=w_x-\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}=w_x-k(\Delta\ell_1+x)\xrightarrow{(1)}\Sigma F_x=-kx$$

Οπότε το σώμα Σ_1 εκτελεί ΑΑΤ και θα αποκτήσει επιτάχυνση $\alpha_2=\alpha_1$ όταν βρεθεί σε απόσταση 0,9m από την κορυφή του επιπέδου και ισοδύναμα σε απομάκρυνση μέτρου:

$$|x_1|=\Delta\ell_1=\frac{w_x}{k}=\frac{mg\eta\mu\theta}{k}=\frac{2\cdot10\cdot0{,}3}{20}m=0{,}3m$$

Θετική ή αρνητική η απομάκρυνση αυτή; Αυτό είναι δική μας επιλογή!!!. Έστω λοιπόν ότι ορίζουμε ως θετική φορά, την φορά κίνησης προς τα κάτω. Τότε το Σ_1 ξεκινά την ταλάντωσή του από την ακραία αρνητική θέση του σε απομάκρυνση $x=-A=(\Delta\ell+\Delta\ell_1)=0{,}6m$ και η εξίσωση της απομάκρυνσής του θα είναι: $x=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$, όπου με αντικατάσταση t=0 και x=-0,6m παίρνουμε:

$$-0{,}6=0{,}6\cdot\eta\mu\varphi_0\rightarrow\eta\mu\varphi_0=-1 \text{ ή } \varphi_0=\frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Ενώ } \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{20}{2}}rad/s=\sqrt{10}rad/s\approx\pi \text{ rad/s}.$$

Αλλά τότε η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$x=0{,}6\cdot\eta\mu\left(\pi t+\frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

Με αντικατάσταση x_1=-0,3m (θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου) βρίσκουμε:

$$-0{,}3=0{,}6\cdot\eta\mu\left(\pi t_1+\frac{3\pi}{2}\right)\rightarrow\eta\mu\left(\pi t_1+\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}\rightarrow$$

$$\pi t_1+\frac{3\pi}{2}=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\xrightarrow{k=1}t_1=\frac{5}{3}s$$

$$\pi t_1+\frac{3\pi}{2}=2k\pi-\frac{\pi}{6}\xrightarrow{k=1}t_1=\frac{1}{3}s$$

Προφανώς για πρώτη φορά θα έχουμε $t_1=1/3\,s$, οπότε για τις ταχύτητες έχουμε:

Για το Σ_1: $\upsilon_1=A\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi t_1+\frac{3\pi}{2}\right)=0{,}6\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{1}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)$

$$\upsilon_1=0{,}6\pi\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)\approx1{,}6m/s$$

Για το Σ_2: $\upsilon_2=a_2\cdot t_1=3\cdot\frac{1}{3}m/s=1m/s.$

iv) Η ταχύτητα του Σ_1 μηδενίζεται για πρώτη φορά τη στιγμή $t_2=\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\pi\sqrt{\frac{2}{20}}s\approx1s$, αφού το σώμα βρίσκεται στην ακραία κάτω θέση του σε απομάκρυνση x_2=0,6m έχοντας συσπειρώσει το ελατήριο κατά $\Delta\ell_2 = \Delta\ell_1 + A = 0{,}3m + 0{,}6m = 0{,}9m$, το οποίο έχει πια μήκος 0,3m, όση και η απόσταση του Σ_1 από την κορυφή Ο του επιπέδου.

Εξάλλου το Σ_2 έχει μετατοπισθεί κατά:

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}a_2 t_2^2 = \frac{1}{2}3\cdot 1^2\, m = 1{,}5m$$

Οπότε έχει φτάσει στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου!

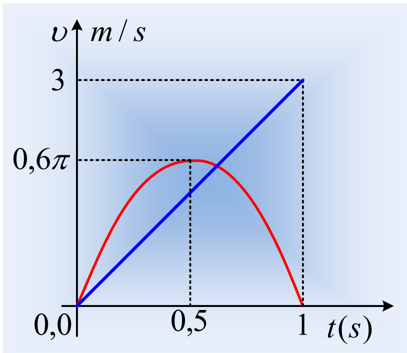
v) Με βάση τα προηγούμενα η ταχύτητα του Σ_1 δίνεται από την εξίσωση:

$$\upsilon_1 = A\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}6\pi\cdot\eta\mu(\pi t) \quad \text{(S.I.)}$$

Και η γραφική της παράσταση είναι η κόκκινη γραμμή στο διάγραμμα. Αντίθετα η ταχύτητα του Σ_2 δίνεται από την εξίσωση:

$$\upsilon_2 = a_2 t = 3t \quad \text{(S.I.)}$$

Και η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία με γαλάζιο χρώμα.



Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης