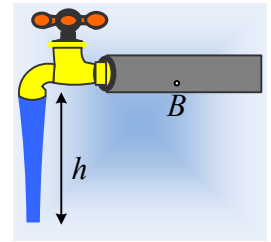


Μια βρύση και μια φλέβα.

Στο σχήμα δίνεται μια ανοικτή βρύση συνδεδεμένη στο δίκτυο ύδρευσης, από την οποία τρέχει νερό, με σταθερή παροχή. Μετράμε τη διάμετρο της φλέβας στην έξοδο της βρύσης και την βρίσκουμε $d_1=1,73\text{cm}$, ενώ η φλέβα λεπταίνει και μόλις κατέβουμε κατά $h=40\text{cm}$, η διάμετρος γίνεται $d_2=1\text{cm}$.



i) Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία το νερό εγκαταλείπει τη βρύση.

ii) Σε πόσο χρόνο μπορούμε να γεμίσουμε ένα δοχείο όγκου 9,4L από τη βρύση αυτή;

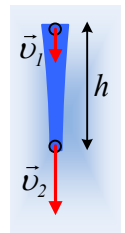
iii) Αν ο σωλήνας (κυλινδρικού σχήματος) που τροφοδοτεί τη βρύση έχει διάμετρο 2cm να υπολογιστεί η πίεση στο σημείο B, στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με την έξοδο της βρύσης.

iv) Κλείνουμε τη βρύση. Ποια είναι τώρα η τιμή της πίεσης στο σημείο B;

Το νερό να θεωρηθεί ιδανικό ρευστό πυκνότητας $\rho=1.000\text{kg/m}^3$, $p_{\text{ατμ}}=10^5\text{Pa}$, ενώ $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

i) Έστω μια μικρή μάζα νερού Δm η οποία εξέρχεται από τη βρύση με ταχύτητα v_1 , ενώ μόλις κατέλθει κατά h έχει ταχύτητα v_2 , όπως στο διπλανό σχήμα. Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των δύο αυτών θέσεων για την μάζα Δm και θεωρώντας τη δυναμική ενέργεια μηδενική στην κατώτερη θέση, παίρνουμε:



$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \Delta m \cdot v_1^2 + \Delta m \cdot gh = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_2^2 + 0 \rightarrow$$

$$v_1^2 + 2gh = v_2^2 \quad (1)$$

Αλλά από την εξίσωση της συνέχειας για τις δύο διατομές A_1 και A_2 παίρνουμε:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \rightarrow v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = v_1 \frac{\pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2}{\pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} \rightarrow$$

$$v_2 = v_1 \frac{d_1^2}{d_2^2} = v_1 \frac{1,73^2}{1^2} = 3v_1$$

Και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$v_1^2 + 2gh = 9v_1^2 \rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{gh}}{2} = \frac{\sqrt{10 \cdot 0,4}}{2} \text{ m/s} = 1 \text{ m/s}$$

ii) Αν απαιτηθεί χρονικό διάστημα Δt για το γέμισμα του δοχείου, τότε παίρνοντας την παροχή της βρύσης, έχουμε:

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A_1 \cdot v_1 \rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{V_\delta}{A_1 v_1} = \frac{V_\delta}{\pi \frac{d_1^2}{4} v_1} = \frac{4V_\delta}{\pi d_1^2 v_1} \rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{4V_\delta}{\pi d_1^2 v_1} = \frac{4 \cdot 9,4 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 1,73^2 \cdot 10^{-4} \cdot 1} s = 40s$$

iii) Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ της διατομής του οριζόντιου σωλήνα στο B και την έξοδο της βρύσης παίρνουμε:

$$A_B v_B = A_1 v_1 \rightarrow v_B = \frac{\pi d_1^2}{\pi d_B^2} v_1 = \frac{d_1^2}{d_B^2} v_1 \rightarrow$$

$$v_B = \frac{d_1^2}{d_B^2} v_1 = \frac{1,73^2}{2^2} 1m/s = 0,75m/s$$

Εφαρμόζουμε τώρα την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου B και ενός σημείου Γ στην έξοδο της βρύσης και έχουμε:

$$p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_\Gamma + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

Αλλά $p_\Gamma = p_{atm}$, συνεπώς:

$$p_B = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_B^2 = 10^5 Pa + \frac{1}{2} 1.000(1^2 - 0,75^2) Pa = 100.218 Pa$$

iv) Μόλις κλείσουμε τη βρύση η πίεση στο σημείο B θα πάρει τιμή:

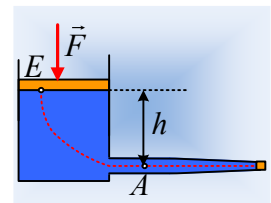
$$p_{B/st} = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = 100.218 Pa + \frac{1}{2} 1000 \cdot 0,75^2 Pa \approx 100.500 Pa$$

Και λίγη παραπάνω θεωρία...

Έστω ένα μεγάλο δοχείο που κλείνεται με αβαρές έμβολο το οποίο δέχεται δύναμη F και με το άκρο του σωλήνα κλειστό.

Στο σημείο A επικρατεί πίεση:

$$p_A = p_{atm} + \frac{F}{S} + \rho gh \quad (1)$$



Ανοίγουμε την τάπα και αποκαθίσταται μόνιμη και στρωτή ροή. Από εξίσωση Bernoulli προκύπτει ότι στο σημείο A έχουμε μια άλλη πίεση, έστω p_2 για την οποία:

$$p_E + \rho gh = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \rightarrow$$

$$p_{atm} + \frac{F}{S} + \rho gh = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad \text{ή}$$

$$p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_{ατμ} + \frac{F}{S} + \rho g h \quad (2)$$

Από (1) και (2) βλέπουμε ότι όταν έχουμε ισορροπία στο σημείο Α επικρατεί μια στατική πίεση p_A ίση με το άθροισμα $p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$ της πίεσης και της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου, κατά τη ροή.

Με άλλα λόγια η στατική πίεση κατά την ηρεμία, εμφανίζεται ως άθροισμα μιας στατικής και μιας «δυναμικής πίεσης» που οφείλεται στη κινητική ενέργεια του υγρού.

dmargaris@gmail.com