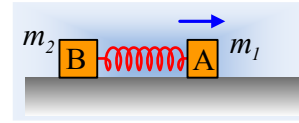


Το σύστημα και τα έργα

Δυο σώματα A και B με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$ συνδέονται με ιδανικό ελατήριο που έχει το φυσικό μήκος του και ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,3$. Σε μια στιγμή ($t=0$) το σώμα A δέχεται ένα στιγμιαίο κτύπημα με αποτέλεσμα να αποκτήσει αρχική ταχύτητα $v_{01}=10\text{m/s}$ στην διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου με αποτέλεσμα το ελατήριο να επιμηκύνεται. Αφού το σώμα A διανύσει απόσταση $x_1=2\text{m}$, τη στιγμή t_1 , η ταχύτητά του μηδενίζεται στιγμιαία. Την ίδια στιγμή το σώμα B έχει μετατοπισθεί κατά $x_2=0,4\text{m}$, έχοντας αποκτήσει ταχύτητα $v_2=3,5\text{m/s}$.



- i) Πόση ενέργεια δόθηκε στο σύστημα με το κτύπημα;
- ii) Να υπολογιστούν τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα A από 0- t_1 . Τι μετράνε τα παραπάνω έργα;
- iii) Να υπολογιστούν τα αντίστοιχα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στο B σώμα, στο ίδιο χρονικό διάστημα. Τι μετράνε τα παραπάνω έργα;
- iv) Κατά το διάστημα αυτό, το ελατήριο κέρδισε ή έχασε ενέργεια; Πόση είναι η ενέργεια αυτή;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Τη στιγμή $t=0$, το A σώμα δέχτηκε κτύπημα με αποτέλεσμα να αποκτήσει κινητική ενέργεια:

$$K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 10^2 \text{ J} = 50 \text{ J}$$

- ii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στα δυο σώματα, κάποια στιγμή που κινούνται προς τα δεξιά. Στην κατακόρυφη διεύθυνση τα σώματα ισορροπούν, οπότε $N_1=w_1=m_1g=10\text{N}$ και $N_2=m_2g=20\text{N}$. Μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του A σώματος, όπου μετατοπίζεται κατά x_1 , παράγονται έργα:

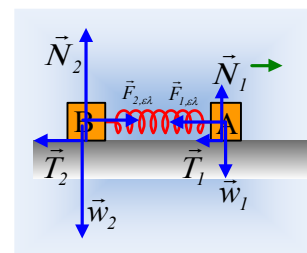
$$W_{w_1}=W_{N_1}=0 \text{ (δυνάμεις κάθετες στη μετατόπιση)}$$

$$W_{T_1}=-T_1 x_1=-\mu N_1 \cdot x_1=-0,3 \cdot 10 \cdot 2 \text{ J}=-6 \text{ J}.$$

Η δύναμη $F_{1,\text{ελ}}$ που ασκείται στο A σώμα είναι μεταβλητή και άγνωστη, οπότε για να υπολογίσουμε το έργο της, εφαρμόζουμε για το σώμα A, το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1} + W_{N_1} + W_{T_1} + W_{F_{1,\text{ελ}}} \quad (1) \rightarrow$$

$$W_{F_{1,\text{ελ}}} = 0 - K_{\text{αρχ}} + 0 + 0 - W_{T_1} = -\frac{1}{2} 1 \cdot 10^2 \text{ J} - (-6 \text{ J}) = -44 \text{ J}$$



Το έργο της τριβής T_1 , μετράει την μηχανική (κινητική) ενέργεια που αφαιρείται από το σώμα A και η οποία μετατρέπεται σε θερμική. Το αντίστοιχο έργο της δύναμης του ελατηρίου $W_{F_{1,ελ}} = -44J$ μετράει την ενέργεια που αφαιρεί το ελατήριο, από το σώμα A.

iii) Με την ίδια λογική για το σώμα B και στη διάρκεια της μετατόπισής του κατά x_2 :

$$W_{w_2} = W_{N_2} = 0 \text{ (δυνάμεις κάθετες στη μετατόπιση)}$$

$$W_{T_2} = -T_2 x_2 = -\mu N_2 \cdot x_2 = -0,3 \cdot 20 \cdot 0,4J = -2,4J.$$

Η δύναμη $F_{2,ελ}$ που ασκείται στο B σώμα είναι επίσης μεταβλητή και άγνωστη, οπότε για να υπολογίσουμε το έργο της, εφαρμόζουμε για το σώμα B, το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_2} + W_{N_2} + W_{T_2} + W_{F_{2,ελ}} \quad (2) \rightarrow$$

$$W_{F_{2,ελ}} = K_{τελ} - 0 - 0 - 0 - W_{T_1} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3,5^2 J - (-2,4J) = 14,65J$$

Στην περίπτωση του B σώματος, το έργο της δύναμης του ελατηρίου $W_{F_{2,ελ}} = 14,65J$ μετράει την ενέργεια που το ελατήριο μεταφέρει στο σώμα B. Το έργο της τριβής T_2 μετράει ξανά τη μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής.

iv) Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα το ελατήριο:

- **Κερδίζει** ενέργεια 44J, όση ενέργεια αφαιρεί από το σώμα A.
- **Χάνει** ενέργεια 14,65J, όση ενέργεια δίνει στο B σώμα, μέσω του έργου της $F_{2,ελ}$.

Αλλά τότε το ελατήριο «έχει κρατήσει» ενέργεια $44J - 14,65J = 29,35J$.

Την ενέργεια αυτή το ελατήριο την έχει αποθηκεύσει με τη μορφή της δυναμικής ενέργειας.

Σχόλιο για Καθηγητές

- 1) Από κει και πέρα μια σειρά ερωτημάτων θα μπορούσαν να διατυπωθούν, όπως:
 - i) Να βρεθεί η σταθερά του ελατηρίου.
 - ii) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του A σώματος τη στιγμή t_1 .
 - iii) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου τη στιγμή $t_1 \dots$
- 2) Προφανώς **δεν** θα μπορούσε να γραφεί ΘΜΚΕ για το σύστημα των σωμάτων. Το να προσθέσουμε τις δύο παραπάνω εξισώσεις (1) και (2) και να πάρουμε:

$$K_{2,τελ} - K_{2,αρχ} + K_{1,τελ} - K_{1,αρχ} = W_{w_2} + W_{N_2} + W_{T_2} + W_{F_{2,ελ}} + W_{w_1} + W_{N_1} + W_{T_1} + W_{F_{1,ελ}} \rightarrow$$

$$K_{ολ,τελ} - K_{ολ,αρχ} = W_{T_2} + W_{F_{2,ελ}} + W_{T_1} + W_{F_{1,ελ}}$$

μπορούμε να το κάνουμε. Η τελευταία εξίσωση θα μπορούσε να θεωρηθεί το ΘΜΚΕ για το σύστημα, αλλά αν κάποιος θελήσει να προχωρήσει, θα έχει άγνωστους τα δυο έργα των δυνάμεων που το ελατήριο ασκεί στα σώματα (εσωτερικές δυνάμεις για το σύστημα των δύο σωμάτων)...

Και προφανώς η γνωστή εξίσωση $W_{F_{ελ}} = U_{αρχ} - U_{τελ}$ δεν ισχύει εδώ, αφού η μεταβολή της δυ-

ναμικής ενέργειας του ελατηρίου δεν συνδέεται με το έργο της μιας, αλλά και των δύο δυνάμεων, που το ελατήριο ασκεί στα δυο σώματα.

dmargaris@gmail.com