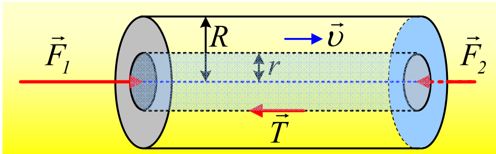
Νόμος του Poiseuille για σωλήνα.

Μια μόνιμη και στρωτή ροή πραγματικού ρευστού.

Έστω σε ένα οριζόντιο σωλήνα, κυλινδρικού σχήματος, ακτίνας R και μήκους ℓ, έχουμε μια μόνιμη και στρωτή ροή, ενός πραγματικού ρευστού με συντελεστή ιξώδους n.



Η ροή ονομάζεται μόνιμη, αφού σε κάθε σημείο, η ταχύτητα έχει μια συγκεκριμένη τιμή ανεξάρτητη του χρόνου και στρωτή, αφού ναι μεν η ταχύτητα είναι διαφορετική στα διάφορα σημεία μιας τομής, αλλά μπορούμε να διακρίνουμε στρώματα με μια ορισμένη ταχύτητα, όπου το ένα κινείται παράλληλα στο άλλο.

Θα μελετήσουμε την δυναμική της ποσότητας του ρευστού που περικλείεται σε ομοαξονικό κύλινδρο ακτίνας r. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις F_1 και F_2, λόγω πίεσης από τις διπλανές ποσότητες ρευστού και η δύναμη εσωτερικής τριβής T, η οποία ασκείται σε όλη την παράπλευρη επιφάνεια του μικρού κυλίνδρου. Για τα μέτρα των δυνάμεων έχουμε:

$$F_1=p_1\cdot A=p_1\cdot \pi r^2,\quad F_2=p_2\cdot A= p_2\cdot \pi r^2 \text{ και } T=n\cdot A_\pi\cdot\frac{d\upsilon}{dz}=-n\cdot A_\pi\cdot\frac{d\upsilon}{dr}=-n\cdot 2\pi r\cdot \ell\cdot\frac{d\upsilon}{dr}$$

αφού καθώς αυξάνεται η ακτίνα, μειώνεται η ταχύτητα.

Επειδή η ροή είναι μόνιμη, για την ποσότητα αυτή του ρευστού, ΣF=0 ή

$$F_1-F_2-T=0 \rightarrow$$

$$p_1\cdot \pi r^2 - p_2\cdot \pi r^2 + n\cdot 2\pi r\cdot \ell\cdot\frac{d\upsilon}{dr}=0\rightarrow$$

$$d\upsilon=-\frac{(p_1-p_2)}{2n\ell}\cdot r\cdot dr$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\int d\upsilon=-\frac{(p_1-p_2)}{2n\ell}\int r\cdot dr\rightarrow$$

$$\upsilon=-\frac{(p_1-p_2)}{2n\ell}\cdot\frac{r^2}{2}+C \quad (1)$$

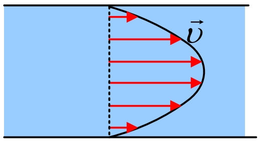
Αλλά για r=R, υ=0, αφού η ταχύτητα του ρευστού που έρχεται σε επαφή με τα τοιχώματα, είναι πρακτικά μηδενική και με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$0=-\frac{(p_1-p_2)}{2n\ell}\cdot\frac{R^2}{2}+C\rightarrow C=\frac{(p_1-p_2)}{2n\ell}\cdot\frac{R^2}{2}$$

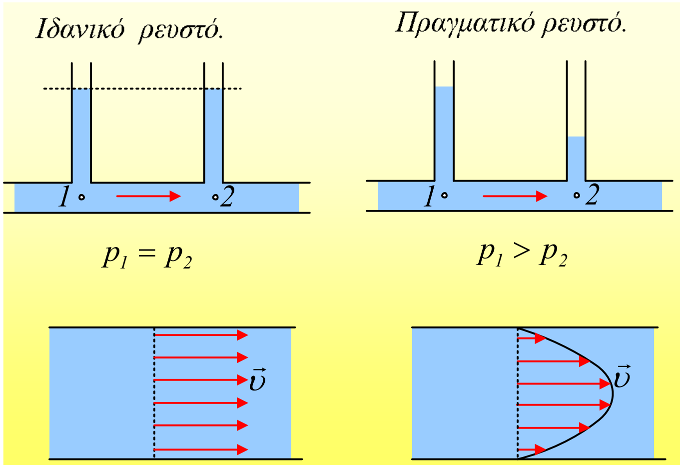
Και η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\upsilon = \frac{(p_1 - p_2)}{4n\ell} \cdot (R^2 - r^2)$$

Η παραπάνω εξίσωση, μας λέει ότι η ταχύτητα ροής, είναι δευτέρου βαθμού ως προς r, πράγμα που σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση στο επίπεδο x-z, θα είναι μια παραβολή (στο χώρο θα έχουμε μια επιφάνεια παραβολική εκ περιστροφής). Έτσι ένα διάγραμμα ταχυτήτων, κατά μήκος μιας διαμέτρου του κυλίνδρου, θα είχε τη μορφή του διπλανού σχήματος.

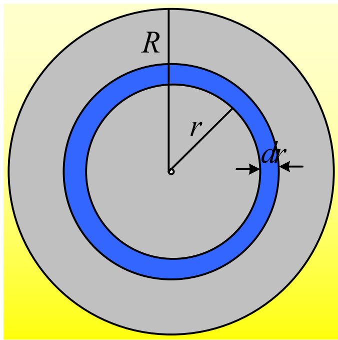


Αξίζει να γίνει αντιπαραβολή της παραπάνω κατάστασης, με την κατάσταση που επικρατεί, όταν έχουμε μια μόνιμη ροή ιδανικού ρευστού. Στο ιδανικό ρευστό δεν απαιτείται να υπάρχει μεταβολή πίεσης κατά μήκος του σωλήνα, σε αντίθεση με το πραγματικό ρευστό, στο οποίο απαιτείται να υπάρχει μείωση της πίεσης κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής (βαθμίδα πίεσης).



Και η παροχή του σωλήνα;

Στο διπλανό σχήμα παίρνουμε μια διατομή του σωλήνα (κάτοψη). Θεωρώντας ότι η διατομή αποτελείται από πολλούς ομόκεντρους δακτυλίους εσωτερικής ακτίνας r και εξωτερικής r+dr, έχουμε για την παροχή μέσω του δακτυλίου:



$$d\Pi = dA \cdot \upsilon = (2\pi r \cdot dr) \cdot \upsilon \rightarrow$$

$$d\Pi = dA \cdot \upsilon = \frac{(p_1 - p_2)}{4n\ell} \cdot (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r \cdot dr$$

Με ολοκλήρωση από r=0 έως r=R παίρνουμε, τη συνολική παροχή:

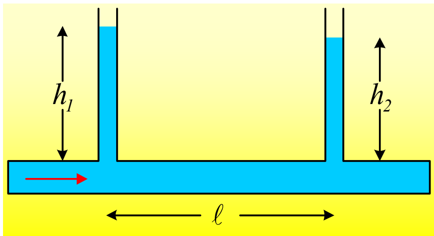
$$\Pi = 2\pi \frac{(p_1 - p_2)}{4n\ell} \cdot \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot r \cdot dr = 2\pi \frac{(p_1 - p_2)}{4n\ell} \cdot R^2 \int_0^R r \cdot dr - 2\pi \frac{(p_1 - p_2)}{4n\ell} \int_0^R r^3 \cdot dr \rightarrow$$

$$\Pi = 2\pi \frac{(p_1 - p_2)}{4n\ell} \cdot R^2 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R - 2\pi \frac{(p_1 - p_2)}{4n\ell}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \rightarrow$$

$$\Pi = \pi \frac{(p_1 - p_2)}{8n\ell} \cdot R^4$$ ***Νόμος Poiseuille.***

Τα όρια του σωστού.

Εφαρμογή:



Σε ένα οριζόντιο σωλήνα κυλινδρικού σχήματος, ακτίνας R=2cm, έχουμε μια μόνιμη και στρωτή ροή νερού, θερμοκρασίας 20°C και πυκνότητας ρ=1.000kg/m^3. Δίνεται ο αριθμός Reynolds για στρωτή ροή $R_{κρ}$=2.000, ενώ η κρίσιμη ταχύτητα για στρωτή ροή, δίνεται από την εξίσωση:

$$\upsilon_{κρ} = R_{κρ} \cdot \frac{n}{\rho R}$$

και ο συντελεστής ιξώδους του νερού n=10^{-3}N·s/m^2. Να βρεθούν:

i) Η μέγιστη δυνατή ταχύτητα του νερού.

ii) Αν στο πρώτο κατακόρυφο σωλήνα, το νερό έχει ανέλθει κατά h_1=8cm, σε πόσο ύψος ανέρχεται στον δεύτερο σωλήνα, αν η οριζόντια απόστασή τους είναι $\ell = 10m$.

iii) Η αντίστοιχη μέγιστη παροχή του σωλήνα.

Απάντηση:

i) Με βάση τα προηγούμενα η μεγαλύτερη δυνατή ταχύτητα που επιτρέπεται να έχει η ροή, ώστε να είναι στρωτή, είναι η κρίσιμη ταχύτητα, οπότε:

$$\upsilon_{max} = R_{κρ} \cdot \frac{n}{\rho R} = 2.000 \cdot \frac{10^{-3}}{10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} m/s = 0{,}1 m/s$$

ii) Η παραπάνω μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα, είναι η ταχύτητα στον άξονα του σωλήνα, δηλαδή για r=0, οπότε από την εξίσωση:

$$\upsilon = \frac{(p_1 - p_2)}{4n\ell} \cdot (R^2 - r^2)$$

Παίρνουμε:

$$p_1 - p_2 = \frac{4n\ell \cdot \upsilon_{max}}{R^2} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 0{,}1}{4 \cdot 10^{-4}} Pa = 10 Pa$$

Όμως $p_1 = p_{ατ} + \rho g h_1$ και $p_2 = p_{ατ} + \rho g h_2$, οπότε

$$p_1 - p_2 = \rho g h_1 - \rho g h_2 \rightarrow h_2 = h_1 - \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = 8 \cdot 10^{-2}\, m - \frac{10}{1000 \cdot 10}\, m = 7{,}9cm$$

iii) Η παροχή του σωλήνα είναι ίση:

$$\Pi = \pi \frac{(p_1 - p_2)}{8n\ell} \cdot R^4 = \pi \frac{10}{8 \cdot 10^{-3} \cdot 10} \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^4 m^3 / s \approx 62{,}8cm^3 / s$$

Σχόλιο:

Ποια είναι η μέση ταχύτητα ροής του νερού μέσα στο σωλήνα;

Αν θεωρήσουμε σταθερή την ταχύτητα ροής υ_μ, έχουμε:

$$\Pi = A \cdot \upsilon_\mu \rightarrow \upsilon_\mu = \frac{\Pi}{A} = \frac{\Pi}{\pi R^2} = \frac{62{,}8cm^3 / s}{3{,}14 \cdot 2^2\, cm} = 5cm^3 / s$$

Ίση με το μισό της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα του σωλήνα.

dmargaris@gmail.com