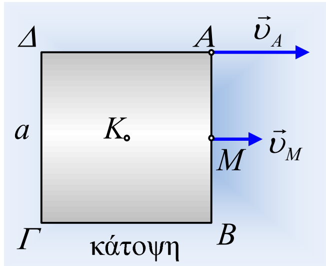
Η κίνηση μιας τετράγωνης πλάκας

Στην επιφάνεια μια παγωμένης λίμνης κινείται μια οριζόντια ομογενής τετράγωνη πλάκα ΑΒΓΔ πλευράς α=0,4m. Μας δίνουν μια φωτογραφία της πλάκας και μας λένε ότι τη στιγμή της λήψης τα σημεία Α και Μ (ΑΜ=ΜΒ), έχουν παράλληλες ταχύτητες, κάθετες στην πλευρά ΑΒ με μέτρα υ_A=0,8m/s και υ_M=0,4m/s.



i) Η κίνηση της πλάκας είναι μεταφορική ή όχι και γιατί;

ii) Να υπολογίσετε της ταχύτητα του κέντρου Κ του τετραγώνου.

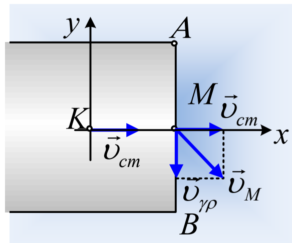
iii) Αν η πλάκα περιστρέφεται, να υπολογιστεί η γωνιακή της ταχύτητα.

iv) Να βρεθεί την παραπάνω στιγμή η ταχύτητα της κορυφής Β.

Απάντηση:

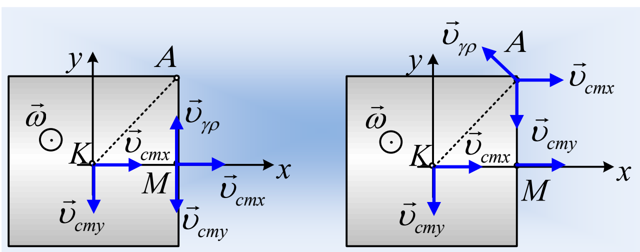
i) Η κίνηση της πλάκας δεν είναι μεταφορική, αφού οι ταχύτητες των σημείων Α και Μ δεν είναι ίσες. Μπορεί να είναι παράλληλες, αλλά έχουν διαφορετικά μέτρα. Συνεπώς η κίνηση θα χαρακτηρισθεί ως σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm} και μια στροφική, γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο Κ της πλάκας.

ii) Προς τα πού κατευθύνεται η ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ; Η απάντηση δεν είναι αυτονόητη. Το σίγουρο είναι ότι δεν έχει την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα του σημείου Μ στην διεύθυνση του άξονα x. Γιατί; Γιατί τότε το σημείο Μ θα είχε και γραμμική ταχύτητα, όπως στο σχήμα, οπότε τότε η ταχύτητα του Μ να είχε την κατεύθυνση του σχήματος και δεν ήταν κάθετη στην πλευρά ΑΒ.



Αλλά τότε η ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ θα έχει μια συνιστώσα στον άξονα x και μια συνιστώσα στον y. Με ποιες κατευθύνσεις;

Ας υποθέσουμε ότι η ταχύτητα του Κ αναλύεται στις συνιστώσες υ_{cmx} και υ_{cmy}, όπως στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα.



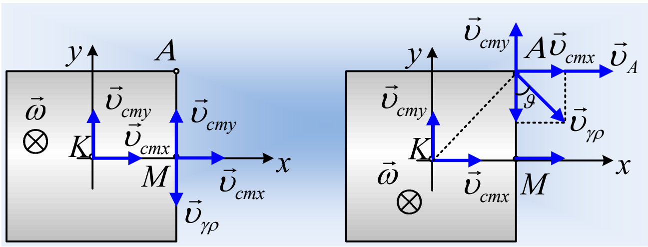
Τότε τις ίδιες συνιστώσες ταχύτητας λόγω μεταφορικής κίνησης έχει και το σημείο Μ. Οπότε για να είναι η ταχύτητα του Μ πάνω στον άξονα x, θα πρέπει η πλάκα να στρέφεται αριστερόστροφα, ώστε $\upsilon_{\gamma\rho}-\upsilon_{cmy}=0$.

Ας έρθουμε τώρα στην κορυφή Α. Στο δεύτερο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι συνιστώσες ταχύτητας λόγω μεταφοράς και λόγω περιστροφής. Αλλά τότε για την ταχύτητα στην διεύθυνση x θα ισχύει:

$$\upsilon_{Ax}=\upsilon_{cmx}-\upsilon_{\gamma\rho x}$$

Το παραπάνω σημαίνει ότι το μέτρο της ταχύτητας του Α θα ήταν μικρότερη από υ_{cmx} που είναι η ταχύτητα του μέσου Μ της πλευράς ΑΒ. Πράγμα άτοπο!

Αλλά τότε τα πράγματα έχουν όπως στο παρακάτω σχήμα:

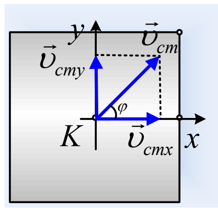


όπου $\upsilon_{My}=0$ ή $\upsilon_{cmy}=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot$ ½ α (1), ενώ $\upsilon_{cmx}=\upsilon_M=0{,}4m/s$.

Ερχόμενοι τώρα στην κορυφή Α, όπου η γραμμική ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα (R=KA), η γωνία θ=45°, οπότε $\upsilon_{\gamma\rho x}=\upsilon_{\gamma\rho y}=\upsilon_{cmy}$. Όμως:

$$\upsilon_A=\upsilon_{cmx}+\upsilon_{\gamma\rho y} \rightarrow \upsilon_{\gamma\rho y}=\upsilon_A-\upsilon_{cmx}=0{,}8m/s-0{,}4m/s=0{,}4m/s$$

Αλλά τότε η ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ έχει μέτρο:



$$\upsilon_{cm}=\sqrt{\upsilon_{cmx}^2+\upsilon_{cmy}^2}=\upsilon_{cmx}\sqrt{2}=0{,}4\sqrt{2}m/s$$

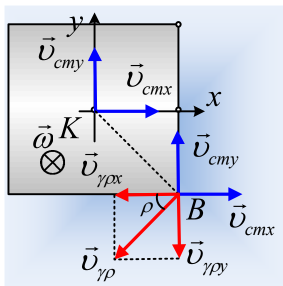
Ενώ φ=45°, αφού το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο.

iii) Επιστρέφοντας τώρα στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$\upsilon_{cmy}=\omega\cdot \tfrac{1}{2}\,\alpha \rightarrow \omega=\frac{2\cdot 0{,}4}{0{,}4}rad/s=2rad/s$$

με κατεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα κάτω, όπως στο προηγούμενο σχήμα.

iv) Η κορυφή Β έχει, με βάση τα παραπάνω, τις συνιστώσες ταχύτητας υ_{cmx}, υ_{cmy} και $\upsilon_{\gamma\rho}$, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου και εδώ ρ=45°. Αλλά τότε:



$$\upsilon_{\gamma\rho x}=\upsilon_{\gamma\rho y}=\upsilon_{\gamma\rho}\cdot \eta\mu\rho=\omega\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\eta\mu\rho\rightarrow$$

$$\upsilon_{\gamma\rho x}=\upsilon_{\gamma\rho y}=2\frac{0{,}4\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}m/s=0{,}4m/s$$

Τότε όμως έχουμε:

$$\upsilon_{Bx}=\upsilon_{cmx}-\upsilon_{\gamma\rho x}=0 \text{ και } \upsilon_{By}=\upsilon_{cmy}-\upsilon_{\gamma\rho y}=0$$

Οπότε και $\upsilon_B=0$!

Σχόλια:

1) Η κορυφή Β του τετραγώνου έχει μηδενική ταχύτητα, όπως βρήκαμε παραπάνω. Αλλά τότε μπορούμε να φανταστούμε έναν σταθερό κατακόρυφο άξονα, ο οποίος περνά από το Β, γύρω από τον οποίο η πλάκα στρέφεται, εκτελώντας μια απλή στροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα ω=2rad/s. Τότε όμως για τις ταχύτητες των σημείων Μ, Α και Κ θα είχαμε:

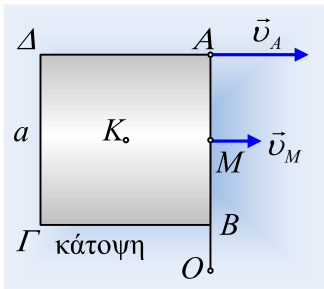
$$\upsilon_M=\omega\cdot \tfrac{1}{2}\, \alpha=0{,}4m/s$$

$$\upsilon_A=\omega\cdot\alpha=0{,}8m/s \text{ και}$$

$$\upsilon_K=\omega\cdot R=\omega\frac{a\sqrt{2}}{2}=2\frac{0{,}4\sqrt{2}}{2}m/s=0{,}4\sqrt{2}m/s$$

Κάθε μια κάθετη στην αντίστοιχη ακτίνα περιστροφής.

2) Βέβαια θα μπορούσε να μην υπάρχει τέτοιος άξονας (μια φωτογραφία είδαμε…). Θα μπορούσαμε όμως να φανταστούμε έναν **στιγμιαίο** άξονα περιστροφής, γύρω από τον οποίο **να θεωρήσουμε** ότι στρέφεται η πλάκα. Από ποιο σημείο θα περνά; Θα είναι πάνω στην ευθεία που είναι κάθετη στις ταχύτητες των σημείων Α και Μ που μας δόθηκαν. Έστω λοιπόν ένα σημείο Ο, από το οποίο διέρχεται ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής. Τότε αν R η απόσταση ΟΜ, έχουμε:



$$\upsilon_M=\omega\cdot R \text{ και } \upsilon_A=\omega\cdot(R+ \tfrac{1}{2}\, \alpha), \text{ ενώ } \upsilon_A=2\upsilon_M$$

Οπότε R+ ½ α=2R ή R= ½ α

Και το σημείο Ο ταυτίζεται με την κορυφή Β.

dmargaris@gmail.com