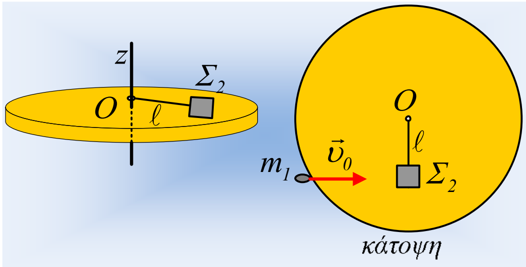
Δυο διαδοχικές «κρούσεις»



Ένας οριζόντιος δίσκος μάζας M=18kg και ακτίνας R=1m μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, που περνά από το κέντρο του O. Στον άξονα περιστροφής έχουμε περάσει ένα μικρό δακτυλίδι, το οποίο μέσω αβαρούς (τεντωμένου) νήματος μήκους l=0,5m συνδέεται με σώμα Σ_2, το οποίο εμφανίζει με το δίσκο συντελεστή τριβής μ=0,4 και το οποίο ηρεμεί. Σε μια στιγμή ένα βλήμα το οποίο κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ_0=200m/s κάθετα στο νήμα, σφηνώνεται στο σώμα Σ_2, δημιουργώντας ένα συσσωμάτωμα Σ μάζας m=4kg, το οποίο αποκτά αρχική ταχύτητα υ_Σ=20m/s.

i) Να υπολογίσετε την απώλεια της μηχανικής ενέργειας η οποία οφείλεται στην κρούση.

ii) Ποια η τάση του νήματος, αμέσως μετά την κρούση;

iii) Κάποια στιγμή η ταχύτητα του συσσωματώματος έχει μέτρο u=10m/s. Για τη στιγμή αυτή να υπολογιστούν:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος Σ.

β) Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου.

iv) Πόση είναι η συνολική μηχανική ενέργεια που εμφανίζεται ως θερμική, εξαιτίας της τριβής μεταξύ του Σ και του δίσκου, μέχρι που να σταματήσει η ολίσθηση του συσσωματώματος πάνω στο δίσκο;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα z, I= ½ MR^2 και g=10m/s^2.

Απάντηση:

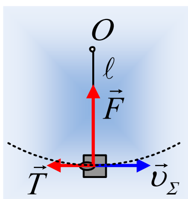
i) Αν m_1 η μάζα του βλήματος, εφαρμόζοντας για την πλαστική κρούση μεταξύ βλήματος και σώματος Σ_2 παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow m_1\upsilon_0 = (m_1 + m_2)\upsilon_\Sigma \rightarrow$$

$$m_1 = \frac{m_\Sigma \upsilon_\Sigma}{\upsilon_0} = \frac{4\cdot 20}{200}kg = 0{,}4kg$$

Οπότε η απώλεια της μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση είναι ίση:

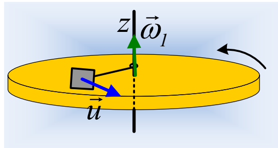
$$Q = \Delta K = \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}m_\Sigma\upsilon_\Sigma^2 = \frac{1}{2}0{,}4\cdot 200^2 J - \frac{1}{2}4\cdot 20^2 J = 7.200J$$



ii) Αμέσως μετά την κρούση η κατάσταση είναι αυτή του διπλανού σχήματος (κάτοψη), όπου F η τάση του νήματος και T η τριβή ολίσθησης μεταξύ Σ και δίσκου. Η τάση του νήματος, είναι υπεύθυνη για την αλλαγή στη διεύθυνση της ταχύτητας (κεντρομόλος δύναμη), οπότε:

$$F = m_\Sigma \frac{\upsilon_\Sigma^2}{\ell} = 4\frac{20^2}{0,5}N = 3.200N$$

iii) Στη διάρκεια της κίνησης του συσσωματώματος, πάνω στο δίσκο, η τριβή (T=μ·N=μ·m_Σg=0,4·4·10N=16N) το επιβραδύνει, αλλά η αντίδρασή της T΄ επιταχύνει στροφικά το δίσκο (η ροπή της είναι υπεύθυνη για τη γωνιακή επιτάχυνσή της). Αλλά οι δυνάμεις αυτές είναι εσωτερικές για το σύστημα Σ-δίσκο, οπότε δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές ως προς τον άξονα z και η στροφορμή κατά (ως προς τον) άξονα z παραμένει σταθερή:



$$\vec{L}_\mu = \vec{L}_1$$

Όπου $\vec{L}_\mu$ η στροφορμή αμέσως μετά την κρούση και $\vec{L}_1$ η στροφορμή του συστήματος τη στιγμή που το συσσωμάτωμα έχει ταχύτητα u.

$$m_\Sigma \upsilon_\Sigma \ell = m_\Sigma u\ell + I_z\omega_1 \rightarrow m_\Sigma \upsilon_\Sigma \ell = m_\Sigma u\ell + \frac{1}{2}MR^2\omega_1 \rightarrow$$

$$\omega_1 = \frac{2m_\Sigma \ell(\upsilon_\Sigma - u)}{MR^2} = \frac{2\cdot 4\cdot 0,5(20-10)}{18\cdot 1}rad/s = 20/9\, rad/s$$

α) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος Σ είναι:

$$\frac{dK_\Sigma}{dt} = \frac{dW_{o\lambda}}{dt} = \frac{T\cdot ds\cdot \sigma\upsilon\nu 180^o}{dt} = -T\cdot u = -16\cdot 10J/s = -160J/s$$

β) Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου είναι:

$$\frac{dK_\delta}{dt} = \frac{dW_{o\lambda}}{dt} = \frac{\tau\cdot d\theta}{dt} = (T\ell)\cdot\omega_1 = 16\cdot 0,5\cdot\frac{20}{9}J/s = \frac{160}{9}J/s \approx 17,8J/s$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι το 1/9 της ενέργειας που αφαιρεί η τριβή από το συσσωμάτωμα μεταφέρεται στο δίσκο. Τα υπόλοιπα 8/9 μετατρέπονται σε θερμική ενέργεια…

iv) Έστω ω η κοινή γωνιακή ταχύτητα δίσκου- συσσωματώματος τη στιγμή που σταματά η ολίσθηση. Εφαρμόζοντας ξανά τη διατήρηση της στροφορμής για το σύστημα, παίρνουμε:

$$\vec{L}_\mu = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow m_\Sigma\upsilon_\Sigma\ell = m_\Sigma v\ell + I_z\omega \rightarrow m_\Sigma\upsilon_\Sigma\ell = m_\Sigma\omega\ell^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega \rightarrow$$

$$\omega = \frac{m_\Sigma\upsilon_\Sigma\ell}{m_\Sigma\ell^2 + \frac{1}{2}MR^2} = \frac{4\cdot 20\cdot 0,5}{4\cdot 0,5^2 + \frac{1}{2}18\cdot 1^2}rad/s = 4rad/s.$$

Οπότε το συσσωμάτωμα έχει τελική ταχύτητα v=ω· ℓ =2m/s.

Η μηχανική ενέργεια που εμφανίζεται ως θερμική, είναι ίση με την «απώλεια» της κινητικής ενέργειας του συστήματος:

$$Q_1 = \Delta K = \frac{1}{2}m_\Sigma\upsilon_\Sigma^2 - \frac{1}{2}m_\Sigma v^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow$$

$$Q_1 = \frac{1}{2}4 \cdot 20^2\,J - \frac{1}{2}4 \cdot 2^2\,J - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}18 \cdot 1^2 \cdot 4^2\,J = 720J$$

dmargaris@gmail.com