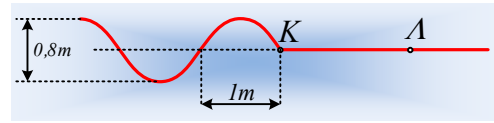


Ένα κύμα, δύο εξισώσεις κύματος

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από τα αριστερά προς τα δεξιά διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα και στο σχήμα δίνεται η μορφή του μέσου σε μια στιγμή που θεωρούμε ότι



$t_0=0$. Το κύμα αυτό φτάνει στο σημείο Λ, όπου $(K\Lambda)=5/3\text{m}$ τη στιγμή $t_1=5/6\text{s}$. Με βάση τις πληροφορίες που δίνονται στο σχήμα, δυο μαθητές, προχωρούν στην «μαθηματική μελέτη» του κύματος, θέλοντας να απαντήσουν σε μια σειρά ερωτημάτων. Ο πρώτος (Γιάννης) θεωρεί αρχή του άξονα ($x=0$) το σημείο Κ στο οποίο έχει φτάσει το κύμα, ο δεύτερος (Δημήτρης) παίρνει ως αρχή του άξονα ($x=0$) το σημείο Λ. Τα ερωτήματα είναι:

- i) Να βρεθεί το μήκος κύματος και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- ii) Ποια η εξίσωση του κύματος;
- iii) Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή $t_2=7/4\text{s}$.
- iv) Να υπολογιστούν τη στιγμή t_2 η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Λ.
- v) Να γίνει η γραφική παράσταση της φάσης της απομάκρυνσης του σημείου Λ σε συνάρτηση με το χρόνο.

Ποιες απαντήσεις δίνουν οι μαθητές;

Απάντηση:

1) Οι απαντήσεις του Γιάννη:

i) Με βάση το σχήμα $\lambda/2=1\text{m}$ οπότε $\lambda=2\text{m}$, ενώ $v = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{(K\Lambda)}{t_1} = \frac{5/3\text{m}}{5/6\text{s}} = 2\text{m/s}$.

- ii) Τη στιγμή $t=0$, το σημείο Κ, στο οποίο φτάνει το κύμα, αρχίζει την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας, κινούμενο προς τα πάνω (θετική κατεύθυνση), οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι:

$$y_K = A \cdot \eta\mu\omega t$$

Όπου το πλάτος κύματος είναι $A= \frac{1}{2} (0,8\text{m})=0,4\text{m}$, ενώ από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής παίρνουμε:

$$v = \lambda f \rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2}{2}\text{Hz} = 1\text{Hz} \text{ οπότε και } T = 1\text{s}.$$

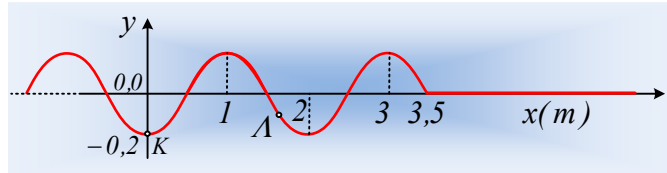
Αλλά τότε η εξίσωση του κύματος παίρνει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) \text{ (μονάδες στο S.I.) με } x \leq 2t \quad (1)$$

- iii) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κύματος $t=t_2$ παίρνουμε:

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t_2 - \frac{x}{2} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu \left(\frac{2\pi \cdot 7}{4} - \frac{2\pi \cdot x}{2} \right) = -0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$$

Ενώ το κύμα έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση $x_2 = vt_2 = 2 \cdot \frac{7}{4} m = 3,5 m$. Με βάση αυτά το στιγμιότυπο έχει τη μορφή:



iv) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Λ είναι:

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu \left(2\pi t - \frac{5\pi}{3} \right) \quad \text{με } t \geq 5/6 \text{ s} \quad (2)$$

Αλλά τότε οι αντίστοιχες εξισώσεις για ταχύτητα και επιτάχυνση είναι:

$$v = 0,4 \cdot 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left(2\pi t - \frac{5\pi}{3} \right) = 0,8\pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left(2\pi t - \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$a = -0,4 \cdot (2\pi)^2 \cdot \eta\mu \left(2\pi t - \frac{5\pi}{3} \right) = -16 \cdot \eta\mu \left(2\pi t - \frac{5\pi}{3} \right)$$

Οπότε με αντικατάσταση $t_2 = 7/4$ s παίρνουμε:

$$v = 0,8\pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left(2\pi t - \frac{5\pi}{3} \right) = 0,8\pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left(2\pi \frac{7}{4} - \frac{5\pi}{3} \right) = 0,8\pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{11\pi}{6} \right) \rightarrow$$

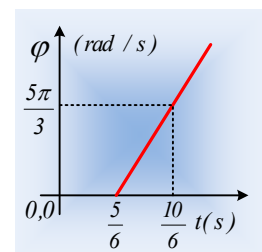
$$v = 0,8\pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = 0,8\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} m/s = 0,4\pi\sqrt{3} m/s \approx 2,2 m/s \text{ και}$$

$$a = -16 \cdot \eta\mu \left(2\pi t - \frac{5\pi}{3} \right) = -16 \cdot \eta\mu \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -16 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) m/s^2 = 8 m/s^2$$

v) Από την σχέση (2) παίρνουμε τη φάση του σημείου Λ:

$$\varphi_{\Lambda} = 2\pi t - \frac{5\pi}{3} \quad \text{με } t \geq 5/6 \text{ s}$$

Συνεπώς η γραφική παράσταση φ - t είναι μια ευθεία, όπως στο διπλανό σχήμα.



2) Οι απαντήσεις του Δημήτρη:

i) Συμφωνώ με το Γιάννη, ότι $\lambda = 2m$ και $v = 2m/s$.

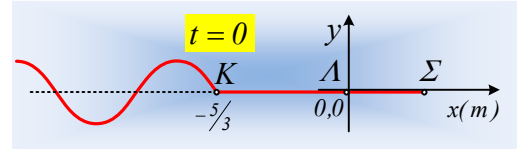
ii) Τη στιγμή $t=0$, το σημείο Κ, στο οποίο φτάνει το κύμα, αρχίζει την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας, κινούμενο προς τα πάνω (θετική κατεύθυνση), οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι:

$$y_K = A \cdot \eta\mu\omega t$$

Όπου το πλάτος κύματος είναι $A = \frac{1}{2} (0,8\text{m}) = 0,4\text{m}$, ενώ από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής παίρνουμε:

$$v = \lambda f \rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2}{2} \text{Hz} = 1\text{Hz} \text{ οπότε και } T = 1\text{s}.$$

Βέβαια το σημείο K βρίσκεται στη θέση $x_K = -5/3\text{m}$, οπότε για να φτάσει το κύμα σε ένα τυχαίο σημείο Σ, όπως στο σχήμα, στη θέση x, θα πρέπει να διαδοθεί σε απόσταση $d = x - x_K$, με αποτέλεσμα το σημείο Σ να κα-



θυστερήσει την ταλάντωσή του κατά $t' = \frac{d}{v} = \frac{x + 5/3}{2}$, με αποτέλεσμα η εξίσωση της απομάκρυνσής του να παίρνει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi(t - t') = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x + 5/3}{2} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} - \frac{5}{6} \right) \text{ (S.I.) και } x \leq -5/3 + 2t$$

Αυτή είναι συνεπώς και η εξίσωση του κύματος.

iii) Με αντικατάσταση $t = t_2 = 7/4\text{s}$ παίρνουμε:

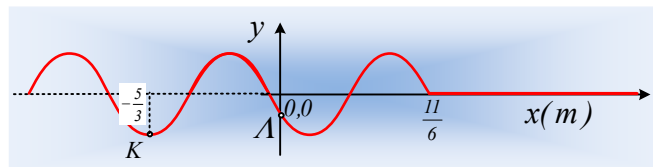
$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} - \frac{5}{6} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{7}{4} - \frac{x}{2} - \frac{5}{6} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu \left(\frac{11\pi}{6} - \pi x \right) \rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu \left(2\pi - \frac{\pi}{6} - \pi x \right) = -0,4 \cdot \eta\mu \left(\pi x + \frac{\pi}{6} \right)$$

Ενώ το κύμα έχει διαδοθεί κατά $d = v \cdot t_2 = 2 \cdot \frac{7}{4} \text{m} = 3,5\text{m}$ συνεπώς έχει φτάσει μέχρι τη θέση:

$$x = d + x_K = \frac{7}{2} \text{m} - \frac{5}{3} \text{m} = \frac{11}{6} \text{m}$$

και το ζητούμενο στιγμιότυπο έχει τη μορφή του σχήματος:



iv) Θέτοντας $x=0$ στην παραπάνω εξίσωση κύματος, παίρνουμε:

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} - \frac{5}{6} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{0}{2} - \frac{5}{6} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu \left(2\pi - \frac{5\pi}{3} \right) \text{ με } t \geq 5/6\text{s}. \text{ (2}^{\text{a}})$$

Αλλά τότε για την ταχύτητά του τη στιγμή t_2 έχουμε:

$$v = 0,4 \cdot 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left(2\pi - \frac{5\pi}{3} \right) = 0,8\pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left(2\pi \frac{7}{4} - \frac{5\pi}{3} \right) = 0,8\pi \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{11\pi}{6} \right) \rightarrow$$

$$v = 0,8\pi \frac{\sqrt{3}}{2} m/s = 0,4\pi\sqrt{3} m/s \approx 2,2 m/s$$

Αντίστοιχα για την επιτάχυνση έχουμε:

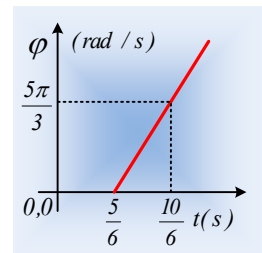
$$a = -0,4 \cdot (2\pi)^2 \cdot \eta\mu\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = -16 \cdot \eta\mu\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$a = -16 \cdot \eta\mu\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = -16 \cdot \eta\mu\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) m/s^2 = 8 m/s^2$$

ν) Από την σχέση (2α) παίρνουμε τη φάση του σημείου Λ:

$$\varphi_{\Lambda} = 2\pi - \frac{5\pi}{3} \quad \text{με } t \geq 5/6 \text{ s}$$

Συνεπώς η γραφική παράσταση φ - t είναι μια ευθεία, όπως στο διπλανό σχήμα, ίδια με την απάντηση του Γιάννη...



Σχόλιο.

Αξίζει να συγκρίνετε τις δυο απαντήσεις των μαθητών. Μπορεί οι δυο εξισώσεις των κυμάτων να φαίνονται διαφορετικές (στην πραγματικότητα η αλλαγή της αρχής του άξονα, αλλάζει μόνο τη φάση, στην εξίσωση του κύματος), αλλά αυτό δεν αλλάζει σε τίποτα, όλα τα ερωτήματα που αφορούν **το ίδιο** το κύμα...

dmargaris@gmail.com