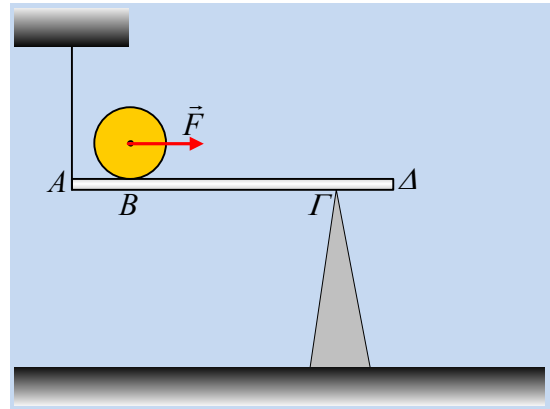


Ένας κύλινδρος πάνω σε μια δοκό.

Η ομογενής δοκός ΑΔ μήκους 4m και μάζας $M=13\text{kg}$, ισορροπεί σε οριζόντια θέση, δεμένη στο άκρο κατακόρυφου νήματος στο άκρο της Α, ενώ στηρίζεται σε τρίποδο στο σημείο Γ, όπου $(\Gamma\Delta)=1\text{m}$, ενώ πάνω της ηρεμεί ένας κύλινδρος ακτίνας $R=0,25\text{m}$ και μάζας $m=10\text{kg}$ σε απόσταση $(AB)=1\text{m}$.

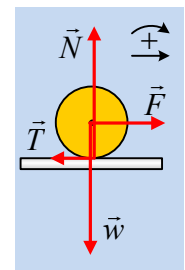
Σε μια στιγμή $t_0=0$ ασκούμε στο κέντρο του κυλίνδρου οριζόντια σταθερή δύναμη F , με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να κυλίσει και να εγκαταλείψει τη δοκό από το άκρο της Δ τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$, οπότε και παύει να ασκείται η δύναμη F . Στη διάρκεια της παραπάνω κίνησης η δοκός παραμένει ακίνητη.



- i) Να υπολογιστεί το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F .
- ii) Να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των περιστροφών του κυλίνδρου μέχρι τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, αν το ύψος που βρίσκεται η δοκός είναι $h=2\text{m}$.
- iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με το χρόνο.
- iv) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ τριπόδου και δοκού για την ισορροπία της δοκού;

Απάντηση:

- i) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, μόλις ασκηθεί πάνω του η οριζόντια δύναμη F , όπου επειδή τα σημεία επαφής του με τη δοκό τείνουν να κινηθούν προς τα δεξιά εμφανίζεται δύναμη τριβής, με φορά προς τα αριστερά. Η τριβή αυτή, από τη στιγμή που μιλάμε για κύλιση, είναι στατική. (Κύλιση εξ ορισμού, είναι η κίνηση στην οποία δεν έχουμε ολίσθηση). Για την σύνθετη κίνηση του κυλίνδρου έχουμε:



$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F_x = m \cdot a_{cm} \rightarrow F - T = m \cdot a_{cm} \quad (1)$$

$$\text{Στροφική κίνηση: } \Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Αλλά από τη στιγμή που ο κύλινδρος κυλιέται ισχύει $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ και η εξίσωση (2) γίνεται:

$$T = \frac{1}{2} m \cdot a_{cm} \quad (2^a).$$

Με πρόσθεση των (1) και (2^α) παίρνουμε:

$$F = \frac{3}{2} m a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{2F}{3m} \quad (3)$$

Από τη στιγμή που η δύναμη F είναι σταθερή, τότε το κέντρο μάζας του κυλίνδρου αποκτά σταθερή επιτάχυνση εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, για την οποία:

$$v_{cm} = a_{cm} \cdot t \quad (4) \quad \text{και} \quad x = \frac{1}{2} a_{cm} \cdot t^2 \quad (5)$$

Από την εξίσωση (5) παίρνουμε $a_{cm} = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot 3}{2^2} m/s^2 = 1,5 m/s^2$.

Και με αντικατάσταση στην (3) $F = \frac{3}{2} m a_{cm} = \frac{3}{2} 10 \cdot 1,5 N = 22,5 N$

ii) Για την στροφική κίνηση του κυλίνδρου παίρνουμε $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{1,5}{0,25} rad/s^2 = 6 rad/s^2$, αλλά

τότε σε χρονικό διάστημα t_1 έχει περιστραφεί κατά $\Delta\theta_1 = \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t_1^2 = \frac{1}{2} 6 \cdot 2^2 rad = 12 rad$, έχοντας

αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = a_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 = 6 \cdot 2 rad/s = 12 rad/s$, τη στιγμή που εγκαταλείπει τη δοκό.

Έτσι ο αριθμός των περιστροφών του κυλίνδρου είναι:

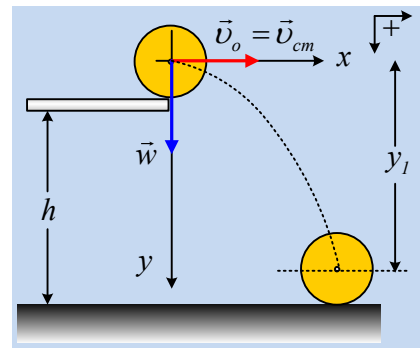
$$N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} = \frac{12}{2\pi} = 1,9$$

Από τη στιγμή που ο κύλινδρος εγκαταλείπει τη δοκό, η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος, οπότε το κέντρο μάζας του θα εκτελέσει οριζόντια βολή, με $v_0 = v_{1cm} = a_{cm} \cdot t_1 = 3 m/s$, για την οποία ισχύουν:

$$v_x = v_{cm} \quad x = v_{cm} \cdot t$$

$$v_y = g \cdot t \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Αλλά τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος $y = (h+R) - R = h$ και η τε-



λευταία εξίσωση δίνει $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{10}} s = \frac{2}{\pi} s$.

Στη διάρκεια της πτώσης η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή, αφού δεν ασκείται καμία ροπή στον κύλινδρο, συνεπώς ο αριθμός των περιστροφών που θα εκτελέσει θα είναι:

$$N_2 = \frac{t}{T} = \frac{t}{2\pi/\omega} = t \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{12}{2\pi} = \frac{12}{\pi^2} = 1,2$$

Συνεπώς ο συνολικός αριθμός περιστροφών μέχρι ο κύλινδρος να φτάσει στο έδαφος θα είναι:

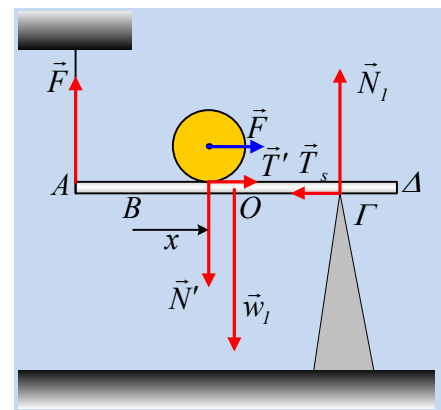
$$N = N_1 + N_2 = 1,9 + 1,2 = 3,1 \text{ περιστροφές.}$$

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, τη στιγμή που ο κύλινδρος απέχει κατά x από την αρχική του θέση B, όπου N' η αντίδραση της δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο, όπου $N = mg = 100 N = N'$, T' η αντίδραση της τριβής που ασκείται στον κύλινδρο μέτρου:

$$T' = T = \frac{1}{2} m \cdot a_{cm} \rightarrow$$

$$T' = \frac{1}{2} 10 \cdot 1,5 N = 7,5 N.$$

Από την ισορροπία της δοκού έχουμε:



$$1) \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow T_s = T' = 7,5 N \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow F + N_I = N' + w_I \quad (1) \end{cases}$$

$$2) \Sigma \tau = 0 \quad (2)$$

Παίρνοντας τις ροπές ως προς το σημείο Γ και θεωρώντας θετικές τις αριστερόστροφες ροπές η (2) δίνει:

$$\begin{aligned} -F \cdot (A\Gamma) + N' \cdot (B\Gamma - x) + w_I \cdot (O\Gamma) &= 0 \\ -F \cdot 3 + 100 \cdot (2 - x) + 130 \cdot 1 &= 0 \rightarrow \\ 3F &= 330 - 100x \rightarrow \end{aligned}$$

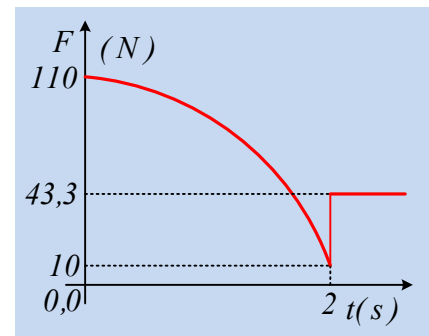
$$F = \frac{330}{3} - \frac{100}{3} \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \rightarrow$$

$$F = 110 - 25 \cdot t^2 \quad (\text{S.I.}) \quad \text{με } t \leq 2\text{s}$$

Μόλις ο κύλινδρος εγκαταλείψει τη δοκό, αυτή συνεχίζει να ισορροπεί, οπότε θα έχουμε:

$$\Sigma \tau_I = 0 \rightarrow -F \cdot (A\Gamma) + w_I \cdot (O\Gamma) = 0 \rightarrow F = 43,3 N$$

Με βάση αυτά η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι αυτή του διπλανού σχήματος.



iv) Με αντικατάσταση της τιμής της τάσης του νήματος στην σχέση (1) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} N_I = N' + w_I - F &= 100 + 130 - (110 - 25t^2) \rightarrow \\ N_I &= 120 + 25 \cdot t^2 \quad (\text{S.I.}) \quad t \leq 2\text{s}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι καθώς ο κύλινδρος κινείται προς τα δεξιά, η δύναμη στήριξης (κάθετη αντίδραση) που ασκεί το τρίποδο στην δοκό, αυξάνεται.

Για να μην ολισθήσει η δοκός θα πρέπει η δύναμη τριβής που δέχεται να είναι στατική, συνεπώς μικρότερη ή οριακά ίση της οριακής τριβής:

$$T_s \leq \mu_s \cdot N_I \rightarrow \mu_s \geq \frac{T_s}{N_I}$$

Η μεγαλύτερη τιμή του συντελεστή οριακής στατικής τριβής, θα προκύψει αν στην παραπάνω εξίσωση, αντικαταστήσουμε την ελάχιστη τιμή της N_I , δηλαδή την τιμή της στην αρχική θέση, αφού στη διάρκεια της κίνησης η στατική τριβή παραμένει σταθερή. Να το διατυπώσω διαφορετικά. Η θέση που είναι ευκολότερο να υπάρξει ολίσθηση, είναι η αρχική θέση, αφού κινούμενος ο κύλινδρος, προκαλεί αύξηση της N_I και εξασφαλίζεται ευκολότερα η μη ολίσθηση.

$$\text{Αλλά για την αρχική θέση } \mu_s \geq \frac{T_s}{N_I} \rightarrow \mu_s \geq \frac{7,5}{120} \rightarrow \mu_s \geq 0,0625.$$

Συνεπώς η ελάχιστη τιμή του συντελεστή είναι $\mu_{s/\min} = 0,0625$.

dmargaris@sch.gr