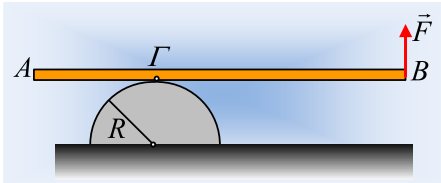
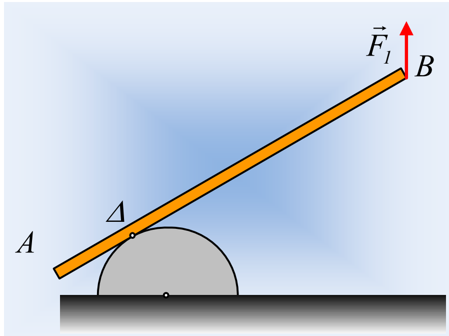
Ισορροπίες και αντίστροφη κύλιση.



Πάνω σε μια μισοβυθισμένη στο έδαφος σφαίρα, ακτίνας R=(3/π)m, στηρίζεται μια ομογενής δοκός ΑΒ μήκους 6m και βάρους 300Ν, η οποία ισορροπεί οριζόντια με την επίδραση μιας κατακόρυφης δύναμης F, η οποία ασκείται στο άκρο της Β, όπως στο σχήμα.

i) Αν (ΑΓ)=2m, όπου Γ το σημείο της ράβδου το οποίο εφάπτεται της σφαίρας, να υπολογιστεί η δύναμη F, για την παραπάνω ισορροπία.



ii) Αυξάνουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F, διατηρώντας την κατακόρυφη, με αποτέλεσμα το άκρο Β της ράβδου να αρχίσει να ανέρχεται, χωρίς η δοκός να γλιστράει πάνω στη σφαίρα. Με τον τρόπο αυτό, φέρνουμε τη δοκό να ισορροπεί όπως στο σχήμα, ενώ F_1=100Ν.

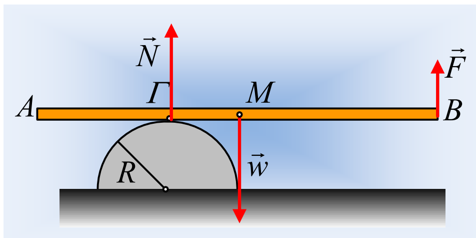
α) Πόσο απέχει το σημείο Δ, σημείο επαφής της δοκού με τη σφαίρα, από το άκρο Α;

β) Ποια γωνία σχηματίζει η δοκός με την οριζόντια διεύθυνση;

γ) Να υπολογιστεί το μέτρο της τριβής που ασκείται στη δοκό.

δ) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ δοκού και σφαίρας για την παραπάνω ισορροπία;

Απάντηση:

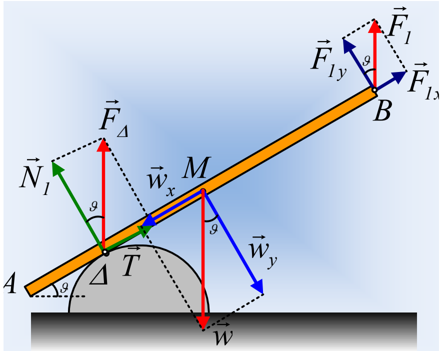


i) Η δοκός ισορροπεί, συνεπώς $\Sigma\vec{F}=0$. Αλλά η δοκός ισορροπεί με την επίδραση τριών δυνάμεων, εκ των οποίων οι δύο (βάρος και F) είναι κατακόρυφες, οπότε και η 3η , η δύναμη από τη σφαίρα είναι κατακόρυφη, όπως στο διπλανό σχήμα. Εξάλλου ισχύει και Στ=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο, οπότε παίρνοντας τις ροπές ως προς το σημείο στήριξης Γ, έχουμε:

$$\Sigma\tau_{\Gamma}=0\rightarrow F\cdot(\Gamma B)-w\cdot(\Gamma M)0\rightarrow$$

$$F=w\frac{(\Gamma M)}{(\Gamma B)}=300N\frac{1m}{4m}=75N$$

ii) Και πάλι η δοκός ισορροπεί με την επίδραση τριών δυνάμεων, οπότε η δύναμη F_{Δ} από τη σφαίρα είναι κατακόρυφη. Αλλά αυτό σημαίνει ότι μπορεί να αναλυθεί σε μια συνιστώσα, κάθετη στην επιφάνεια (την N_1) και σε μια παράλληλη στην επιφάνεια, την τριβή T_1, όπως στο διπλανό σχήμα. Από την ισορροπία της δοκού παίρνουμε:



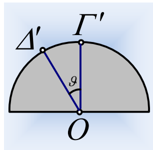
$$\Sigma\tau_\Delta = 0 \rightarrow F_{1y}\cdot(B\Delta) - w_y\cdot(M\Delta) = 0$$

α) Οπότε αν (ΑΔ)=x, με αντικατάσταση θα έχουμε:

$$F_1\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(\ell - x) - w\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\left(\frac{\ell}{2} - x\right) = 0 \rightarrow$$

$$100\cdot(6\text{-}x)=300(3\text{-}x) \rightarrow x=1{,}5m.$$

β) Αρχικά η δοκός εφάπτεται στην σφαίρα στο σημείο Γ΄ και τελικά στο σημείο Δ΄. Αλλά τότε η γωνία που σχηματίζουν οι αντίστοιχες ακτίνες, είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζει η δοκός με την οριζόντια διεύθυνση (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές).



Όμως η δοκός δεν γλίστρησε πάνω στην σφαίρα, οπότε το μήκος του τόξου (Γ΄Δ΄), είναι ίσο με το αντίστοιχο μήκος (ΓΔ) της δοκού:

$$(\Gamma\Delta)=(A\Gamma)\text{-}(A\Delta)=2m=1{,}5m=0{,}5m$$

Συνεπώς για τη γωνία θ έχουμε:

$$\vartheta = \frac{(\Delta'\Gamma')}{R} = \frac{0{,}5}{3/\pi} = \frac{\pi}{6}\,(\text{rad})$$

γ) Από την ισορροπία της δοκού στην διεύθυνση x παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow T_1 - w_x + F_{1x} = 0 \rightarrow$$

$$T_1 = w\cdot\eta\mu\theta - F_1\cdot\eta\mu\theta = \left(300\cdot\frac{1}{2}N - 100\cdot\frac{1}{2}N\right) = 100N$$

δ) Για να μπορεί να ασκηθεί η παραπάνω στατική τριβή, θα πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση με την οριακή στατική τριβή.

$$T_1 \le T_{o\rho} \rightarrow T_1 \le \mu_s N_1 \rightarrow \mu_s \ge \frac{T_1}{N_1}$$

$$A\lambda\lambda\acute{\alpha}\ N_1=F_\Delta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=(w\text{-}F_1)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=(300N\text{-}100N)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}N$$

Αφού και η δύναμη F_Δ είναι κατακόρυφη και ΣF=0, οπότε:

$$\mu_s \ge \frac{T_1}{N_1} \rightarrow \mu_s \ge \frac{100N}{100\sqrt{3}N} \rightarrow \mu_s \ge \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Κατά συνέπεια ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ δοκού και σφαίρας για να έχουμε την παραπάνω ισορροπία, έχει τιμή $\mu_{s,min} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

dmargaris@gmail.com