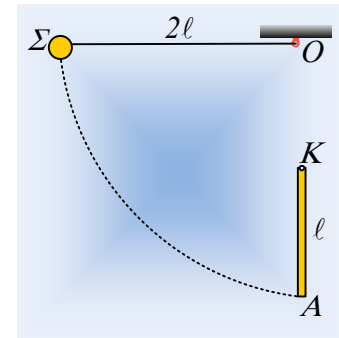


Πώς εφαρμόζουμε την ΑΔΣ;

Η ομογενής ράβδος ΚΑ του σχήματος μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Κ, έχει μήκος l , μάζα m και ηρεμεί σε κατακόρυφη θέση. Μια μικρή σφαίρα (υλικό σημείο) της ίδιας μάζας m είναι δεμένη στο άκρο νήματος μήκους $2l$ το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί στο σημείο Ο, το οποίο βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το Κ και σε ύψος $h=l$ πάνω από αυτό. Εκτρέπουμε τη σφαίρα ώστε το νήμα να γίνει οριζόντιο και την αφήνουμε να κινηθεί. Μετά από λίγο η σφαίρα συγκρούεται στο άκρο Α της ράβδου, έχοντας αποκτήσει οριζόντια ταχύτητα v , ενώ μετά την κρούση η ράβδος αποκτά γωνιακή ταχύτητα ω .



Θέλοντας να μελετήσουμε την κρούση αυτή, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων. Τρεις μαθητές έγραψαν τις παρακάτω εξισώσεις:

α) Ο Αντώνης: $mv \cdot 2l = mv_1 \cdot 2l + I_{p,cm} \cdot \omega + mv_{cm} \cdot 3l/2$

β) Ο Βασίλης: $mv \cdot l = mv_1 \cdot l + I_{p,K} \cdot \omega$

γ) Ο Γιάννης: $mv \cdot \frac{1}{2} l = mv_1 \cdot \frac{1}{2} l + I_{p,cm} \cdot \omega$

i) Ως προς ποιο σημείο (ή άξονα) ο κάθε μαθητής εφάρμοσε την ΑΔΣ;

ii) Ποια ή ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις είναι σωστές;

Απάντηση:

i) Ο Αντώνης εφάρμοσε την ΑΔΣ, ως προς το Ο, θεωρώντας ότι μετά την κρούση η ράβδος εκτελεί σύνθετη κίνηση, ενώ το κέντρο μάζας της ράβδου απέχει $3l/2$ από το Ο.

Ο Βασίλης την εφάρμοσε ως προς το σημείο Κ.

Ο Γιάννης ως προς το μέσον (το κέντρο μάζας) της ράβδου.

ii) Η αρχή διατήρησης της στροφορμής ισχύει αν η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική ως προς το σημείο (ή τον άξονα) αναφοράς μας, αφού:

$$\frac{dL_{o\lambda}}{dt} = \Sigma \tau_{\epsilon\xi}$$

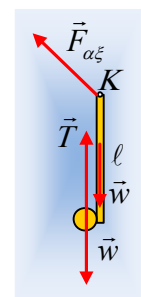
Οι εξωτερικές δυνάμεις είναι τα δυο βάρη, η τάση του νήματος T και η δύναμη από τον άξονα $F_{\alpha\xi}$, η οποία μας είναι άγνωστη στη διάρκεια της κρούσης.

Αλλά τότε μόνο ως προς το Κ μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διατήρηση της στροφορμής για το σύστημα αφού $\Sigma \tau_K = 0$, ενώ η στροφορμή της σφαίρας ως προς το Κ, θα έχει μέτρο:

$$L_{\sigma\phi} = mv \cdot l$$

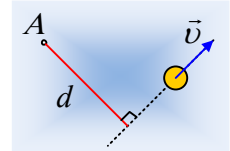
ανεξάρτητα της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς, στην οποία μπορεί να κινείται.

Συνεπώς από τους τρεις μαθητές, δίκιο έχει ο Βασίλης ο οποίος έγραψε και τη σωστή εξίσωση.



Σχόλια:

- 1) Θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι το βάρος της σφαίρας έχει ροπή ως προς Κ με μέτρο $w \cdot R$. Αλλά από τη στιγμή που θεωρούμε τη σφαίρα υλικό σημείο $R \rightarrow 0$ και η ροπή αυτή είναι μηδενική.
- 2) Κάποιος άλλος θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι η στροφορμή της σφαίρας πριν την κρούση έχει μέτρο $L_1 = mv \cdot 2\ell$ και όχι $L_1 = mv \cdot \ell$ αφού η κυκλική τροχιά που διαγράφει είναι 2ℓ .



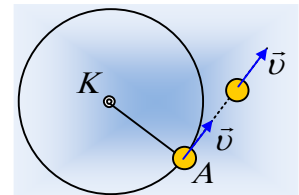
Η απάντηση είναι:

α) Δεν υπάρχει στροφορμή της σφαίρας. Υπάρχει στροφορμή ως προς...

β) Δεν παίζει κανένα ρόλο η ακτίνα της τροχιάς, που είχε ακολουθήσει η σφαίρα κατά το παρελθόν της κρούσης! Σημασία έχει η ταχύτητα που έχει τη στιγμή που αρχίζει να συγκρούεται!

Μπορούμε να ορίσουμε στροφορμή ενός υλικού σημείου ως προς οποιοδήποτε σημείο με μέτρο $L = mv \cdot d$, όπου d η απόσταση του φορέα της ταχύτητας από το σημείο αναφοράς μας.

- 3) Αλλά επειδή αυτός ο κάποιος! μπορεί να λέγεται «άπιστος Θωμάς» ας δούμε κάτι ακόμη. Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται οριζόντια ένα υλικό σημείο, δεμένο στο άκρο νήματος, διαγράφοντας κύκλο ακτίνας R . Σε μια στιγμή φτάνοντας στη θέση Α, το νήμα κόβεται.



Να βρεθεί η μεταβολή της στροφορμής του σώματος που οφείλεται στο κόψιμο του νήματος.

Απάντηση:

Προφανώς μόλις κοπεί το νήμα, το υλικό σημείο (μια σφαίρα στο διπλανό σχήμα), θα κινηθεί ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα. Στη χρονική διάρκεια που χρειαστήκαμε να κόψουμε το νήμα (πρακτικά απειροελάχιστο χρονικό διάστημα) ασκήθηκε κάποια ροπή στο σώμα για να του μεταβάλλει τη στροφορμή; Ο γενικευμένος νόμος του Νεύτωνα μας λέει ότι:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau$$

Ενώ οι μόνες δυνάμεις που έχουν ροπή ως προς το κέντρο Κ της τροχιάς είναι το βάρος και η κάθετη αντίδραση Ν, όπου $\Sigma F = 0$ και συνεπώς $\Sigma\tau_K = 0$. Αλλά τότε είμαστε υποχρεωμένοι να δεχτούμε ότι η στροφορμή της σφαίρας πριν το κόψιμο του νήματος, είναι ίση με τη στροφορμή μετά ως προς το Κ (είτε είναι το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, πριν ή ένα τυχαίο σημείο για τη σφαίρα στη διάρκεια της ευθύγραμμης κίνησής της...), έχοντας μέτρο:

$$L_1 = mv \cdot R$$

Όσον αφορά την κατεύθυνσή της, είναι πάντα κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς στο Κ, με φορά προς τον αναγνώστη.

dmargaris@gmail.com