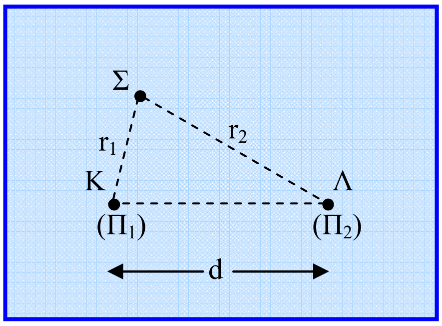
Διερευνήσεις στην επιφανειακή συμβολή



$Α_1$. Στα σημεία Κ και Λ της επιφάνειας υγρού υπάρχουν πηγές παραγωγής αρμονικών κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα που απέχουν απόσταση $d=2λ$, όπου λ το μήκος κύματος των δύο αρμονικών κυμάτων τα οποία θεωρούμε ότι διαδίδονται ως εγκάρσια κύματα σταθερού πλάτους. Οι πηγές ταλαντώνονται σύμφωνα με την εξίσωση $y=Αημωt$ και η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι υ. Το σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού απέχει από την πηγή $Π_1$ απόσταση $(ΚΣ)=r_1$ και από την πηγή $Π_2$ απόσταση $(ΛΣ)=r_2$ με $r_2> r_1$.

Αν $r_1 + r_2 =3λ$ και $r_1 \cdot r_2 =2λ^2$, το σημείο Σ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σ' αυτό ταλαντώνεται με πλάτος

α. 2Α **β.** 0 **γ.** Α

$Α_2$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$Β_1$. Μετά τη συμβολή των κυμάτων σε όλη την επιφάνεια του υγρού, σημεία που ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος με αυτό του Σ ανήκουν

α. μόνον στον ίδιο κροσσό* συμβολής .

β. μόνον σε διαφορετικούς κροσσούς συμβολής

γ. σε έλλειψη με εστίες τα Κ και Λ

$Β_2$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$Γ_1$. Στην έλλειψη $r_1 + r_2 =3λ$, εκτός από το σημείο Σ, υπάρχουν και άλλα σημεία, που ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος με αυτό του Σ. Το πλήθος τους είναι

α. 7 **β.** 8 **γ.** 9

$Γ_2$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$Δ_1$. Τη χρονική στιγμή t_1 που το κύμα από την πηγή $Π_1$ φθάνει στο σημείο Σ, το κύμα από την πηγή $Π_2$

α. έχει φθάσει σε κάποιο σημείο της ΚΣ

β. δεν έχει φθάσει σε κάποιο σημείο της ΚΣ

γ. τα δεδομένα δεν είναι αρκετά για να απαντηθεί το ερώτημα.

$Δ_2$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$Ε_1$. Θεωρούμε ότι οι πηγές $Π_1$ και $Π_2$ εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις. Αν μεταβάλλουμε τη συχνότητα ταλάντωσής τους από f σε f', το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Σ του υγρού, μετά τη συμβολή των κυμάτων σ' αυτό,

α. μεταβάλλεται για κάθε τιμή της νέας συχνότητας f'

β. δεν μεταβάλλεται αν $f'=κ f$ με κ=2,3…

γ. δεν μεταβάλλεται για οποιαδήποτε τιμή της νέας συχνότητας f'.

$Ε_2$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απαντήσεις

A_1. α

A_2. Από τις δοθείσες σχέσεις : $r_1 + r_2 = 3\lambda$ και $r_1 \cdot r_2 = 2\lambda^2$ προκύπτει ότι οι αποστάσεις r_1 και r_2 είναι ρίζες της εξίσωσης: $z^2 - 3\lambda z + 2\lambda^2 = 0$. **(1)**

Από την **(1)**: $z = \dfrac{3\lambda \pm \sqrt{9\lambda^2 - 8\lambda^2}}{2}$ ή $z_1 = \lambda$ και $z_2 = 2\lambda$. Αλλά $r_2 > r_1$, άρα $r_1 = \lambda$ **(2)** και $r_2 = 2\lambda$ **(3)**.

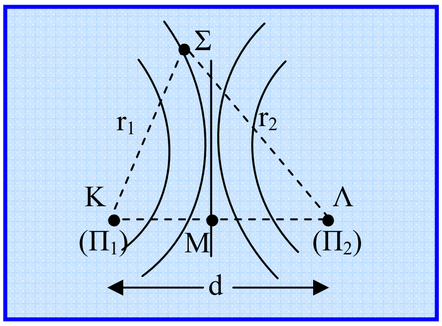
Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Σ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σ' αυτό είναι:

$$A_\Sigma = 2A\left|\text{συν}2\pi\left(\frac{r_2 - r_1}{2\lambda}\right)\right| \overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} A_\Sigma = 2A\left|\text{συν}2\pi\left(\frac{2\lambda - \lambda}{2\lambda}\right)\right| \Rightarrow A_\Sigma = 2A\left|\text{συν}2\pi\left(\frac{\lambda}{2\lambda}\right)\right|$$

$$\Rightarrow A_\Sigma = 2A$$

B_1. γ

B_2. Για το σημείο Σ ισχύει : $r_1 - r_2 = 2\lambda - \lambda = \lambda$, άρα βρίσκεται στον πρώτο κροσσό ενισχυτικής συμβολής αριστερά της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ. Με το ίδιο πλάτος 2Α ταλαντώνονται και όλα τα άλλα σημεία που βρίσκονται στον ίδιο κροσσό (κλάδο υπερβολής) με το Σ, αλλά και τα σημεία που ικανοποιούν τη συνθήκη $|r_2 - r_1| = \kappa\lambda$ με $\kappa = 0, \pm1, \pm2 \ldots$ και βρίσκονται σε διαφορετικούς κροσσούς ενισχυτικής συμβολής.
Επειδή για το σημείο Σ ισχύει : $r_1 + r_2 = 3\lambda$=σταθ. αυτό ανήκει και σε έλλειψη με εστίες τα Κ και Λ.



* (ο) κροσσός = θύσανος νημάτων που εξέχει από ένδυμα ως διακόσμηση (κ. κρόσσι).
Ως επιστημονικός όρος , δομή ή σχηματισμός που μοιάζει σε σχήμα στο κρόσσι.
Στην **ανατομία**, μικροσκοπικά διεγέρσιμα και συσταλτά νημάτια που φέρουν κύτταρα του επιθηλίου των αναπνευστικών οδών και άλλων ιστών τού σώματος των σπονδυλοζώων. Δομικά μοιάζουν με τις βλεφαρίδες.
Στη **φυσική**, καθεμιά από τις φωτεινές ή σκοτεινές κατακόρυφες ταινίες που δημιουργούνται πάνω σε ένα πέτασμα ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο δεσμών μονοχρωματικής φωτεινής ακτινοβολίας ή το αποτέλεσμα της συμβολής μηχανικών κυμάτων.

Σχόλιο

Ο όρος «κροσσοί συμβολής» ήταν αυτός που παλαιότερα εχρησιμοποιείτο στην περιγραφή του φαινομένου της επιφανειακής συμβολής, αλλά και της συμβολής φωτεινών κυμάτων. Ως όρος περιέγραφε τις οικογένειες καμπυλών(υπερβολών) που αποτελούσαν τους γεωμετρικούς τόπους σημείων που ικανοποιούσαν μια ιδιότητα π.χ κροσσοί ενισχυτικής ή αποσβεστικής συμβολής, φωτεινοί ή σκοτεινοί κροσσοί. Η χρήση του όρου σταδιακά υποχώρησε και αντικαταστάθηκε με τον όρο «υπερβολές ενισχυτικής ή αποσβεστικής συμβολής». Ο όρος φαίνεται ότι «εκδικήθηκε» τους εμπνευστές της αντικατάστασής του, αφού σε κάθε περίπτωση που πρέπει να μετράμε οικογένειες σημείων με την ίδια ιδιότητα ετίθετο θέμα αν οι δύο κλάδοι της ίδιας υπερβολής θα λογίζονται ως δύο υπερβολές ή ως δύο κλάδοι της ίδιας (μίας) υπερβολής. Κάποιοι επιχειρούν να ξεπεράσουν το πρόβλημα, που δημιουργήθηκε χωρίς ουσιαστικό λόγο, με τη χρήση του γενικόλογου «γραμμές σημείων» που έχουν κάποια ιδιότητα. Όταν η απόσυρση ενός όρου προκαλεί προβλήματα εκεί που δεν υπήρχαν, μάλλον αποτέλεσμα ιδεοληψίας είναι. Πρόκειται για την ίδια ιδεοληψία που μας οδήγησε να ακούμε στην δημόσια τηλεόραση από νεαρούς και νεαρές εκφωνητές –τριες «ο διεθνή παράγοντας» και «της καταρρακτώδης βροχής»…

Γ_1. α

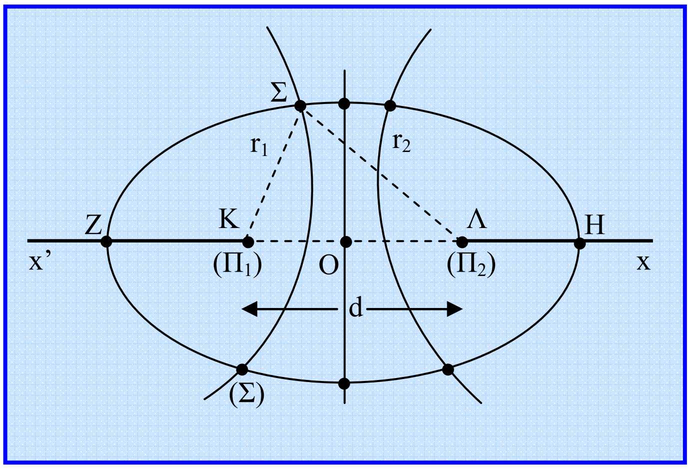
Γ_2. Σημεία που ανήκουν στην ίδια έλλειψη με το Σ και ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος (2Α) με αυτό ανήκουν σε κροσσούς ενισχυτικής συμβολής ,δηλαδή ικανοποιούν τις συνθήκες :
$r_1 + r_2 = 3\lambda$ **(1)** και $r_1 - r_2 = \kappa\lambda$ **(2)** με $\kappa = 0, \pm1, \pm2 \ldots$

Αθροίζουμε τις **(1)** και **(2)** :

$2r_1 = \kappa\lambda + 3\lambda \Rightarrow r_1 = \dfrac{\kappa\lambda+3\lambda}{2}$,

αλλά $0 < r_1 < 3\lambda$ και $0 < \dfrac{\kappa\lambda+3\lambda}{2} < 3\lambda$

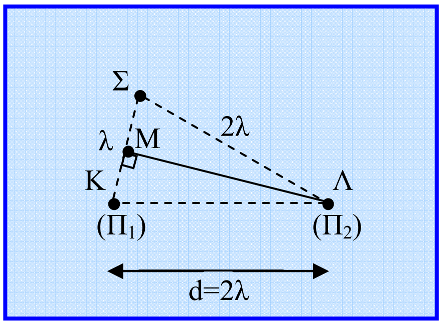
$\Rightarrow \; -3 < \kappa < 3 \,, \kappa \in Z$.



Άρα $\kappa = -2, -1, 0, 1, 2$. Οι τιμές αυτές του κ αντιστοιχούν στις τάξεις των κροσσών ενισχυτικής συμβολής που υπάρχουν μεταξύ των K και Λ. Το σημείο Σ ανήκει στον κροσσό με τάξη κ= –1,δηλαδή στον πρώτο αριστερά της μεσοκαθέτου και εκτός αυτού υπάρχουν άλλα 5 σημεία που ανήκουν στους κροσσούς με τάξεις κ= –1,0,1.Όμως,(!!) υπάρχουν άλλα 2 σημεία (Z,H) πάνω στην έλλειψη που αποτελούν τα σημεία τομής των εκφυλισμένων στις ημιευθείες Kx΄ και Λx κροσσών (υπερβολών) με τάξεις κ=2 και κ= –2.Πράγματι στις θέσεις Κ (Π_1) και Λ (Π_2), όπως και σ' όλα τα σημεία των ημιευθειών Kx΄ και Λx έχουμε ενισχυτική συμβολή διότι $r_1 - r_2 = (\Pi_1\Pi_2) = 2\lambda$. Τα σημεία Z και H απέχουν από τα K(Π_1) και Λ(Π_2) αντίστοιχα αποστάσεις $\dfrac{\lambda}{2}$.Επομένως, εκτός του Σ υπάρχουν άλλα 7 σημεία που ταλαντώνονται με πλάτος 2Α.

Δ_1.β

Δ_2. Το κύμα από την πηγή Π_1 (K) φθάνει στο σημείο Σ τη χρονική στιγμή $t_1 = \dfrac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow t_1 = \dfrac{\lambda}{\upsilon}$ **(1)**.Το πλησιέστερο προς την πηγή Π_2 (Λ) σημείο του ευθύγραμμου τμήματος (ΚΣ) είναι το μέσο του Μ, δηλαδή ο πόδας της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος (ΚΣ).Αν τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα που παράγει η πηγή Π_2 δεν έχει φθάσει στο σημείο Μ δεν θα έχει φθάσει και σε κανένα άλλο σημείο του ευθύγραμμου τμήματος (ΚΣ).Η μεσοκάθετος του (ΚΣ) διέρχεται από το Λ, διότι το τρίγωνο $K\overset{\Delta}{\Lambda}\Sigma$ είναι ισοσκελές, καθώς



(ΚΛ)=(ΛΣ)=2λ. Το κύμα που παράγει η πηγή Π_2(Λ) φθάνει στο Μ τη χρονική στιγμή $t_{\Lambda M} = \dfrac{(\Lambda M)}{\upsilon}$ **(2)**.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $K\overset{\Delta}{M}\Lambda$:

$$(M\Lambda) = \sqrt{(K\Lambda)^2 - (KM)^2} \Rightarrow (M\Lambda) = \sqrt{(2\lambda)^2 - (\frac{\lambda}{2})^2} \Rightarrow (M\Lambda) = \sqrt{\frac{15\lambda^2}{4}} \Rightarrow (M\Lambda) = \frac{\lambda\sqrt{15}}{2} \;\mathbf{(3)}$$

Από $\mathbf{(2)} \overset{(3)}{\Rightarrow} t_{\Lambda M} = \dfrac{\lambda\sqrt{15}}{2\upsilon}$ **(4)**

Από $\dfrac{\mathbf{(1)}}{\mathbf{(4)}} : \dfrac{t_1}{t_{\Lambda M}} = \dfrac{\frac{\lambda}{\upsilon}}{\frac{\lambda\sqrt{15}}{2\upsilon}} = \dfrac{2}{\sqrt{15}} \Rightarrow t_{\Lambda M} > t_1$. Άρα όταν το κύμα από την πηγή Π_1 (K) φθάνει στο Σ , το κύμα από την πηγή Π_2 (Λ) δεν έχει φθάσει σε κανένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος (ΚΣ).

E_1.β

E_2. Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Σ μετά την αλλαγή της συχνότητας ταλάντωσης των πηγών από f σε f' δεν μεταβάλλεται αν

$$|A_\Sigma| = |A'_\Sigma| = 2A \Rightarrow 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{2\lambda}\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{2\lambda'}\right| = 2A \Rightarrow \left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{2\lambda}\right| = \left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{2\lambda'}\right| = 1 \overset{|r_1 - r_2| = \lambda}{\Rightarrow}$$

$$\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(\lambda)}{2\lambda'}\right| = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi\lambda}{\lambda'} = \pm 1 \Rightarrow \frac{\pi\lambda}{\lambda'} = \kappa\pi \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{\kappa} \Rightarrow \frac{\upsilon}{f'} = \frac{\upsilon}{\kappa f} \Rightarrow f' = \kappa f \text{ με } \kappa \geq 2 \text{ και } \kappa \in Z^+.$$

Σχόλιο 1

Η ταλάντωση που εκτελεί το σημείο Σ όπως και κάθε άλλο σημείο της επιφάνειας του υγρού στην πραγματικότητα είναι εξαναγκασμένη. Μετά τις εξετάσεις του 2014 όπου το τρίτο θέμα εισήγαγε το «δεδικασμένο» ότι η ταλάντωση κάθε σημείου της επιφάνειας του υγρού είναι απλή αρμονική (αποδοχή του υπολογισμού της ταχύτητας ταλάντωσης με εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης) θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε τα εξής:

Ο τρόπος που δόθηκε παραπάνω είναι αρκετά παραπλανητικός και οδηγεί στην εξαγωγή συμπερασμάτων που δεν ισχύουν. Θεωρήσαμε ότι οι πηγές εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις για τις οποίες γνωρίζουμε ότι το πλάτος τους δεν εξαρτάται από τη συχνότητα ταλάντωσης.

Με την παραδοχή όμως που αναφέραμε πριν, το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Σ όπως και όλων των υπολοίπων σημείων της επιφάνειας του υγρού μπορεί να θεωρηθεί ως το πλάτος μιας ταλάντωσης (αρμονικής) που προκύπτει από τη σύνθεση των εξισώσεων δύο αρμονικών ταλαντώσεων του ιδίου πλάτους A και της ιδίας συχνότητας f κάθε φορά που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση: $|A_\Sigma| = \sqrt{A^2 + A^2 + 2AA\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi}$ όπου $\Delta\varphi = 2\pi f(\frac{r_1}{\upsilon} - \frac{r_2}{\upsilon})$.

Άρα $|A_\Sigma| = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2\sigma\upsilon\nu 2\pi f(\frac{r_1}{\upsilon} - \frac{r_2}{\upsilon})}$. Η τελευταία σχέση μας δείχνει ότι το πλάτος $|A_\Sigma|$ εξαρτάται από τη διαφορά φάσης Δφ. Δηλαδή είναι η διαφορά φάσης που με τη μεταβολή της προκαλεί μεταβολή του πλάτους ταλάντωσης του σημείου Σ. Αντίθετα, από τη σχέση του πλάτους ταλάντωσης μετά τη συμβολή: $|A_\Sigma| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{2\lambda}\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi f\frac{(r_1 - r_2)}{2\upsilon}\right|$ δημιουργείται η εντύπωση ότι η μεταβολή του πλάτους οφείλεται στην αλλαγή της συχνότητας κάτι που δεν είναι συνεπές με την παραδοχή περί απλής αρμονικής ταλάντωσης.

Σχόλιο 2

Γενικεύοντας το προηγούμενο συμπέρασμα θα απαντήσουμε στην ερώτηση για ποιες τιμές της νέας συχνότητας f' δεν μεταβάλλεται το πλάτος ταλάντωσης μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σε οποιοδήποτε σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού.

$$|A_\Sigma| = |A'_\Sigma| \Rightarrow 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{2\lambda}\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{2\lambda'}\right| \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{2\upsilon}f = \pm\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{2\upsilon}f' \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{2\upsilon}f = \kappa\pi + 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{2\upsilon}f' \\ 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{2\upsilon}f = \kappa\pi - 2\pi\frac{(r_1 - r_2)}{2\upsilon}f' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{r_1 - r_2}{\upsilon}\right)(f - f') = \kappa \Rightarrow f - f' = \frac{\kappa\upsilon}{r_1 - r_2} \\ \left(\frac{r_1 - r_2}{\upsilon}\right)(f + f') = \kappa \Rightarrow f + f' = \frac{\kappa\upsilon}{r_1 - r_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} f' = f - \frac{\kappa\upsilon}{r_1 - r_2} \\ f' = \frac{\kappa\upsilon}{r_1 - r_2} - f \end{array}\right\} \text{με } \kappa = 1, 2, ...$$

Προφανώς για τα σημεία που ανήκουν στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τις δύο πηγές όπου $r_1 = r_2$ προκύπτει ότι το πλάτος ταλάντωσης είναι ανεξάρτητο της συχνότητας διότι σε κάθε περίπτωση τα δύο αρμονικά κύματα φτάνουν ταυτόχρονα και δεν υπάρχει διαφορά φάσης.