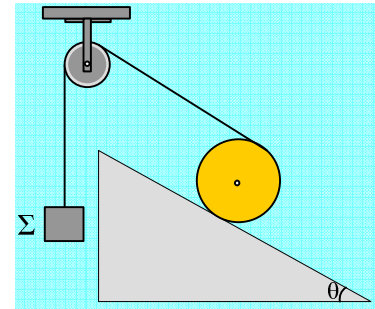


### Ο κύλινδρος σε πλάγιο επίπεδο.

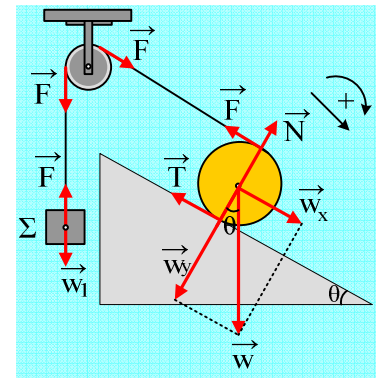
Στο μέσον ενός κυλίνδρου μάζας  $M=20\text{kg}$ , ο οποίος συγκρατείται σε κεκλιμένο επίπεδο, κλίσεως  $\theta=30^\circ$ , υπάρχει μια μικρή εγκοπή στην οποία έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, το οποίο αφού περάσουμε από μια αβαρή τροχαλία, στο άλλο άκρο του δένουμε ένα σώμα  $\Sigma$  μάζας  $m=2,5\text{kg}$ , όπως στο σχήμα. Αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί. Αν το τμήμα του νήματος μεταξύ κυλίνδρου και τροχαλίας, είναι παράλληλο με το επίπεδο, οι συντελεστές τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου  $\mu=\mu_s=0,4$ , η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g=10\text{m/s}^2$ , ενώ η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του  $I= \frac{1}{2} MR^2$ .



- i) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος  $\Sigma$
- ii) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου, ως προς τον άξονά του, αν η ακτίνα του είναι  $R=0,7\text{m}$ .
- iii) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη στιγμή που το σώμα  $\Sigma$  έχει ανέβει κατά  $1\text{m}$ .

#### Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, όπου αφού η τροχαλία και ο νήμα είναι αβαρή, το νήμα ασκεί δύναμη ίσου μέτρου τόσο στον κύλινδρο, όσο και στο σώμα  $\Sigma$ , η τάση του νήματος  $F$ . Επειδή  $w_x=Mg\eta\theta=100\text{N}$ , ενώ  $w_1=mg=25\text{N}$ , ο κύλινδρος θα κατέβει κατά μήκος του επιπέδου. Αυτό που δεν ξέρουμε είναι αν κυλιέται ή αν ολισθαίνει. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η κίνησή του είναι κύλιση χωρίς ολίσθηση.



- i) Για την μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

$$\Sigma F = M a_{\text{cm}} \rightarrow Mg\eta\theta - F - T = M \cdot a_{\text{cm}} \quad (1)$$

Εξάλλου για την περιστροφική του κίνηση έχουμε:

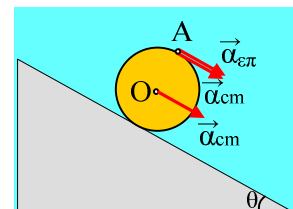
$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot R - F \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T - F = \frac{1}{2} MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Ενώ αφού υποθέσαμε ότι ο κύλινδρος κυλιέται  $a_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ , οπότε η (2) γίνεται  $T - F = \frac{1}{2} M a_{\text{cm}}$  (3)

Εξάλλου για την κίνηση του σώματος  $\Sigma$  ο 2<sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα μας δίνει  $F - mg = ma_{\Sigma}$ . (4)

Ας έρθουμε τώρα στο σημείο A του κυλίνδρου που καταλήγει το νήμα. Το σημείο A έχει επιτάχυνση  $a_{\text{cm}}$  λόγω μεταφορικής κίνησης και  $a_{\text{επ}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$  εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης, που οφείλεται στην περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου. Συνεπώς  $a_A = a_{\text{cm}} + a_{\text{επ}} = 2a_{\text{cm}}$ . Αλλά το σημείο A, σαν σημείο του νήματος, έχει την ίδια επιτάχυνση με όλα τα σημεία του νήματος και κατά συνέπεια και με το σημείο πρόσδεσης του σώματος  $\Sigma$ , δηλαδή  $a_{\Sigma} = 2a_{\text{cm}}$ . Πολλαπλασιάζουμε την (4) επί 2 και κατόπιν την προσθέτουμε με τις (1) και (2) κατά μέλη, οπότε παίρνουμε:

$$Mg\eta\theta - F - T + T - F + 2F - 2mg = M a_{\text{cm}} + \frac{1}{2} M a_{\text{cm}} + 4m a_{\text{cm}} \rightarrow$$



$$a_{cm} = \frac{Mg\eta\mu\theta - 2mg}{4m + \frac{3M}{2}} = 1,25m / s^2$$

Έτσι η επιτάχυνση του σώματος  $\Sigma$  είναι  $a_{\Sigma} = 2a_{cm} = 2,5m/s^2$ .

Με αντικατάσταση στην (4) βρίσκουμε  $F = mg + ma_{\Sigma} = 25N + 2,5 \cdot 2,5N = 175/4N$ , οπότε από την (3) παίρνουμε  $T = F + \frac{1}{2} M a_{cm} = 43,75N$ .

Το ερώτημα είναι, αν η υπόθεσή μας ότι ο κύλινδρος κυλιέται είναι σωστή. Βρίσκουμε την μέγιστη τιμή της στατικής τριβής, την οριακή τριβή  $T_{op} = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot Mg \cdot \sin\theta \approx 69,2N$ , ενώ η ασκούμενη τριβή υπολογίστηκε  $43,75N$ , είναι λοιπόν στατική και η υπόθεσή μας ήταν σωστή.

ii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου, με θετική φορά, την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, είναι:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = T \cdot R - F \cdot R = (T - F)R = (43,75 - 31,25)0,7kgm^2 / s^2 = 35,4kgm^2 / s^2$$

iii) Τη στιγμή που ο σώμα  $\Sigma$  έχει ανέβει κατά  $1m$ , το σημείο  $A$  έχει μετακινηθεί επίσης κατά  $1m$ , ενώ ο κύλινδρος έχει κατέβει κατά  $x = 0,5m$ , αφού από την σχέση  $a_{\Sigma} = 2a_{cm}$  προκύπτει ότι κάθε στιγμή το σώμα έχει διπλάσια μετατόπιση από τον άξονα του κυλίνδρου. Εφαρμόζουμε για την παραπάνω μετακίνηση του κυλίνδρου το Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{wx} + W_{wy} + W_T + W_F \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = Mg\eta\mu\theta \cdot x - F \cdot 2x \rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = 18,75J$$

Να σημειωθεί ότι το έργο της τριβής είναι μηδενικό, αφού ασκείται σε σημείο που έχει μηδενική ταχύτητα, συνεπώς δεν μετατοπίζεται το σημείο εφαρμογής της.

[dmargaris@sch.gr](mailto:dmargaris@sch.gr)

