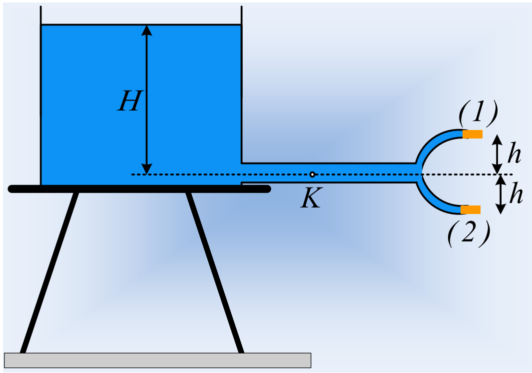
Η δεξαμενή και οι δύο παροχές.

Ένα μεγάλο ντεπόζιτο περιέχει νερό και στο κάτω μέρος του συνδέεται οριζόντιος σωλήνας διατομής Α, ο οποίος καταλήγει σε δυο μικρότερους σωλήνες (1) και (2), όπως στο σχήμα, με διατομές $A_1=A_2=$ ½ Α . Το σημείο Κ, στον οριζόντιο σωλήνα, απέχει κατακόρυφη απόσταση Η από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, ενώ οι μικρότεροι σωλήνες στην έξοδο φράσσονται με τάπες, οι οποίες απέχουν κατακόρυφες αποστάσεις h, από το Κ.



i) Η πίεση στο σημείο Κ έχει τιμή p_K, όπου:

α) $p_K=p_{ατμ}$, β) $p_K=p_{ατμ}+ρgH$, γ) $p_K=p_{ατμ}+ρgh$, δ) $p_K=ρgH$

όπου $p_{ατμ}$ η ατμοσφαιρική πίεση, ρ η πυκνότητα του νερού και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

ii) Αν ανοίξουμε την τάπα (1) και αποκατασταθεί μια μόνιμη στρωτή ροή, για την πίεση p_1 στο Κ ισχύει:

α) $p_1 < p_K$, β) $p_1 = p_K$, γ) $p_1 > p_K$.

iii) Αν ανοίξουμε ταυτόχρονα και τις δύο τάπες, μόλις αποκατασταθεί μια μόνιμη στρωτή ροή, για την πίεση p_2 στο Κ ισχύει:

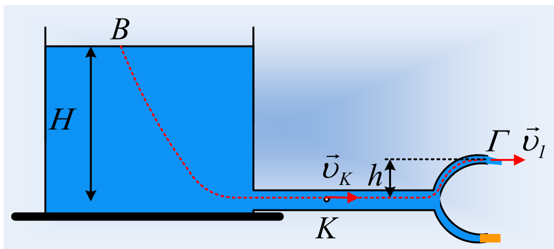
α) $p_2<p_1$, β) $p_2 = p_1$, γ) $p_2 > p_1$.

Θεωρούμε το νερό ιδανικό ρευστό και ότι κατά τις παραπάνω ροές, η επιφάνεια του νερού στο ντεπόζιτο παραμένει σταθερή.

Απάντηση:

i) Το σημείο Α βρίσκεται σε βάθος Η από την επιφάνεια του νερού που ισορροπεί και η πίεση θα είναι ίση με $p_K=p_{ατμ}+ρgH$, αφού πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια υπάρχει ατμόσφαιρα. Σωστό το β).

ii) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί μια ρευματική γραμμή ΒΚΓ.



Με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli μεταξύ των σημείων Β και Κ παίρνουμε:

$$p_B + ρgH + \frac{1}{2}ρυ_B^2 = p_K + \frac{1}{2}ρυ_K^2 \quad (1)$$

Αλλά, αφού πρακτικά δεν κατεβαίνει η επιφάνεια του νερού $υ_B=0$, $p_B=p_{ατμ}$, ενώ $p_K΄=p_1$, οπότε η (1) δίνει:

$$p_{ατμ} + ρgH = p_K + \frac{1}{2}ρυ_K^2 \rightarrow p_1 = (p_{ατμ} + ρgH) - \frac{1}{2}ρυ_K^2 \text{ ή}$$

$$p_1 = p_K - \frac{1}{2}ρυ_K^2$$

Η πίεση δηλαδή μειώνεται λόγω ροής και σωστή είναι η επιλογή α).

iii) Με ανοικτή μόνο την πάνω τάπα (1) παίρνουμε από την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Κ και Γ:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 = p_\Gamma + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2$$

$$p_1 = \left(p_{\alpha\tau\mu} + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2\right) - \frac{1}{2}\rho\upsilon_{K1}^2 \quad (2)$$

Εφαρμόζοντας τώρα την ίδια εξίσωση για τα σημεία Β και Γ παίρνουμε:

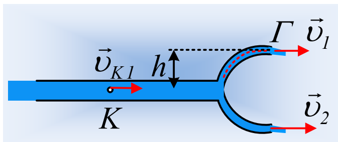
$$p_B + \rho gH = p_\Gamma + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 \ (3)$$

Αλλά $p_B = p_\Gamma = p_{\alpha\tau\mu}$ οπότε $\upsilon_\Gamma = \sqrt{2g(H-h)}$ (4)

Ενώ από την εξίσωση της συνέχειας για τις διατομές στα Κ και Γ παίρνουμε:

$A_K \cdot \upsilon_K = A_\Gamma \cdot \upsilon_\Gamma \rightarrow A \cdot \upsilon_K = ½\ A \cdot \upsilon_\Gamma$ ή

$$\upsilon_{K1} = \frac{1}{2}\upsilon_\Gamma \ (4)$$



Έστω τώρα ότι έχουμε και τις δυο τάπες ανοικτές. Η εξίσωση (3) ισχύει ξανά, πράγμα που σημαίνει ότι η ταχύτητα εκροής στο άκρο Γ, παραμένει ίδια με προηγουμένως, εξίσωση (4).

Με την ίδια συλλογιστική (μπορείτε να μιλήστε και για τον νόμο Torricelli…) βρίσκουμε ότι η ταχύτητα εκροής στον κάτω σωλήνα, άκρο Δ, δίνεται από την εξίσωση:

$$\upsilon_\Delta = \upsilon_2 = \sqrt{2g(H+h)}$$

Ενώ από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ της διατομής στο Κ και στις δυο εξόδους, παίρνουμε:

$A \cdot \upsilon_{K2} = A_1 \cdot \upsilon_1 + A_2 \cdot \upsilon_2 \rightarrow$

$$A \cdot \upsilon_{K2} = \frac{1}{2}A\upsilon_1 + \frac{1}{2}A\upsilon_2 \rightarrow$$

$$\upsilon_{K2} > \upsilon_{K1}$$

Παίρνουμε ξανά την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Κ και Γ:

$$p_{K2} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_{K2}^2 = p_\Gamma + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2$$

$$p_2 = \left(p_{\alpha\tau\mu} + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2\right) - \frac{1}{2}\rho\upsilon_{K2}^2 \quad (5)$$

Από την σύγκριση των σχέσεων (2) και (5) προκύπτει ότι $p_2 < p_1$. Σωστό το α).

Σχόλιο:

Το άνοιγμα της δεύτερης τάπας στο άκρο Δ, δεν μεταβάλλει την ταχύτητα εκροής στο Γ. Αλλά νερό εκρέει και από το στόμιο στο Δ, οπότε αυξάνει η ταχύτητα ροής στο σημείο Κ. Αλλά τότε από την (1):

$$p_K = \left(p_{\alpha\tau\mu} + \rho gH\right) - \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2$$

Προκύπτει ότι η αύξηση της ταχύτητας ροής στο Κ συνοδεύεται από μείωση της πίεσης στο Κ, οπότε $p_2<p_1$.

dmargaris@gmail.com