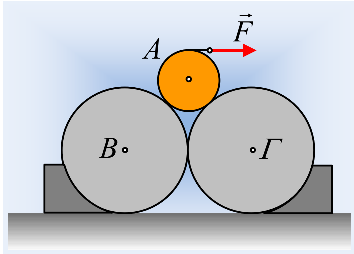
Τρία βαρέλια ισορροπούν



Τρία κυλινδρικά δοχεία ισορροπούν όπως στο σχήμα, όπου δυο εμπόδια (τάκοι…) εμποδίζουν τα κάτω να κινηθούν. Στο σχήμα βλέπετε τις τρεις βάσεις των δοχείων, όπου τα δυο κάτω έχουν ίσες ακτίνες $R_2=R_3=1{,}6m$, ενώ το πάνω ακτίνα $R=0{,}4m$. Η επιφάνεια του Β δοχείου είναι λεία, ενώ μεταξύ Α και Γ ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής έχει τιμή $\mu_s=0{,}8$. Το δοχείο Α έχει μάζα m=160kg, ενώ $g=10m/s^2$.

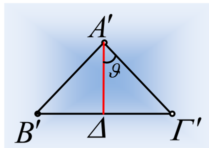
i) Να βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται στο πάνω δοχείο Α.

ii) Γύρω από το Α έχουμε τυλίξει έναν αβαρή ιμάντα, μέσω του οποίου ασκούμε πάνω του μια οριζόντια δύναμη F=40N. Να βρείτε την τριβή που εμφανίζεται μεταξύ των δοχείων Α και Γ.

iii) Να εξετάσετε αν μπορούμε, αυξάνοντας το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F, να μηδενίσουμε τη δύναμη που ασκείται στο δοχείο Α από το Β, χωρίς να έχουμε περιστροφή.

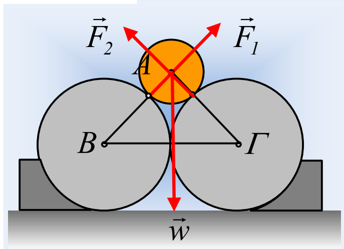
iv) Αν η δύναμη πάρει την τιμή $F_3=1.000N$, να εξετάσετε αν ο κύλινδρος θα γλιστρήσει ή όχι, αμέσως μετά.

Απάντηση:



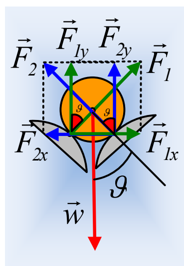
i) Αν ονομάσουμε Α΄, Β΄ και Γ΄ τα κέντρα των τριών βάσεων, τότε το τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ είναι ισοσκελές, ενώ το ύψος Α΄Δ είναι και διάμεσος, με αποτέλεσμα για τη γωνία θ του σχήματος να ισχύει:

$$\eta\mu\vartheta = \frac{(\Delta\Gamma')}{(A'\Gamma')} = \frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{1{,}6m}{0{,}4m+1{,}6m} = 0{,}8$$



Αλλά τότε θα έχουμε και συνθ=0,6 (γιατί;)

Στο πάνω δοχείο ασκούνται τρεις δυνάμεις, η προβολή των οποίων στο επίπεδο των βάσεων (στο επίπεδο της σελίδας) είναι όπως στο σχήμα. Η δύναμη F_1 είναι κάθετη στην επιφάνεια ελλείψει τριβών, συνεπώς πάνω στην ακτίνα του πάνω δοχείου, περνώντας από το κέντρο Α΄. Αλλά τότε και η F_2 θα περνά από το Α΄ αφού ως προς το σημείο αυτό θα πρέπει Στ=0.



Αλλά τότε αναλύοντας τις δυνάμεις σε δυο άξονες, έναν οριζόντιο και έναν κατακόρυφο και λαμβάνοντας υπόψη, ότι αφού το δοχείο ισορροπεί $\Sigma\vec{F}=0$, παίρνουμε:

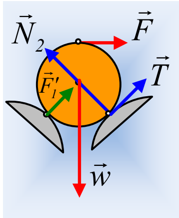
$\Sigma F_x=0 \rightarrow F_{1x}-F_{2x}=0 \rightarrow F_1\cdot\eta\mu\theta=F_2\cdot\eta\mu\theta$ ή $F_1=F_2$ (1)

$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_1\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+F_2\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=w$ ή λόγω της (1)

$$2F_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = mg \rightarrow F_1 = F_2 = \frac{mg}{2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} \rightarrow$$

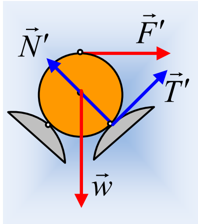
$$F_1 = F_2 = \frac{mg}{2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{160 \cdot 10}{2 \cdot 0{,}6} N = 4.000/3\, N$$

ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται τώρα στο δοχείο Α. Από αυτές η δύναμη από το Β δοχείο, η $F_1΄$περνάει από το κέντρο Α΄, καθώς και η κάθετη αντίδραση N_2 από το δοχείο Γ. Αλλά αφού το δοχείο Α ισορροπεί $\Sigma\tau_{A΄}=0$ ή

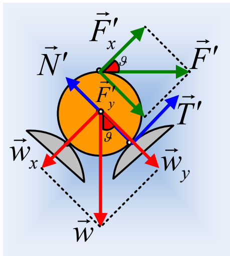


$$T{\cdot}R\text{-}F{\cdot}R=0 \rightarrow T=F=40N$$

iii) Έστω ότι αυξάνοντας το μέτρο της ασκούμενης δύναμης, κάποια στιγμή μηδενίζεται η δύναμη από το Β δοχείο, οπότε πλέον οι μεις που ασκούνται στο Α, είναι αυτές του διπλανού σχήματος, ενώ το κυλινδρικό δοχείο ισορροπεί.



Αναλύουμε τις δυνάμεις σε κάθετους άξονες, όπου ο x έχει την κατεύθυνση της τριβής και ο y την κατεύθυνση της N΄, παίρνοντας ρακάτω σχήμα. Από την ισορροπία του κυλίνδρου παίρνουμε:



$$\Sigma\tau_{A΄}=0 \rightarrow T΄{\cdot}R\text{-}F΄{\cdot}R=0 \rightarrow T΄=F΄$$

Ενώ για την ισορροπία στους άξονες, έχουμε:

$$F_x΄+T΄\text{-}w_x=0 \rightarrow F΄{\cdot}\sigma\upsilon\nu\theta+F΄=mg{\cdot}\eta\mu\theta \rightarrow$$

$$F' = \frac{mg \cdot \eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{160 \cdot 10 \cdot 0{,}8}{1+0{,}6} N = 800N$$

Ενώ $\Sigma F_y=0 \rightarrow N΄=w_y+F_y΄ \rightarrow N΄=mg{\cdot}\sigma\upsilon\nu\theta+F΄{\cdot}\eta\mu\theta \rightarrow$

$$N΄=160{\cdot}10{\cdot}0{,}6N+800{\cdot}0{,}8N=1600N.$$

Αλλά τότε η οριακή στατική τριβή μεταξύ των δοχείων Α και Β (η **μέγιστη** στατική τριβή που **θα μπορούσε** να εμφανιστεί) έχει μέτρο:

$$T_{o\rho}=\mu_s{\cdot}N΄=0{,}8{\cdot}1600N=1.280N$$

Ενώ για την ισορροπία απαιτείται στατική τριβή T΄=F΄=800N, πράγμα που σημαίνει ότι η τριβή είναι στατική και ο κύλινδρος ισορροπεί.

iv) Αφού η δύναμη γίνεται μεγαλύτερη από την προηγούμενη τιμή που εξασφάλιζε ισορροπία, το κυλινδρικό δοχείο θα κινηθεί; Τι κίνηση θ κάνει;

Θεωρούμε την κίνηση σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική, γύρω από τον οριζόντιο άξονά της που συνδέει τα κέντρα των δύο βάσεων. Η εικόνα θα είναι η ίδια με αυτή του τελευταίου σχήματος, όπου αντί για F΄ έχουμε F_3 και έστω η τριβή T_3. Εφαρμόζοντας τους νόμους του Νεύτωνα έχουμε:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_y=0 \rightarrow N_3 =w_y+F_y \rightarrow N_3=mg{\cdot}\sigma\upsilon\nu\theta+F_3{\cdot}\eta\mu\theta \rightarrow$

$$N_3=160{\cdot}10{\cdot}0{,}6N+1.000{\cdot}0{,}8N=1.760N.$$

$$\Sigma F_x = m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F_{3x}+T_3-mg\cdot\eta\mu\theta = m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F_3\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+T_3-mg\cdot\eta\mu\theta = m\cdot\alpha_{cm} \quad (2)$$

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F_3\cdot R - T_3\cdot R = \frac{1}{2} mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F_3 - T_3 = \frac{1}{2} mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (3)

Έστω ότι η κίνηση είναι κύλιση (χωρίς ολίσθηση), τότε $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη των (2) και (3) παίρνουμε:

$$F_3+F_3\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-mg\cdot\eta\mu\theta = \frac{3}{2}ma_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{2F_3(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{3m} - \frac{2g\cdot\eta\mu\theta}{3} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \left(\frac{2\cdot 1.000(1+0,6)}{3\cdot 160} - \frac{2\cdot 10\cdot 0,8}{3}\right)m/s^2 = 4/3\, m/s^2.$$

Και από την (3):

$$T_3 = F_3 - \tfrac{1}{2}\, m\alpha_{cm} = 1.000N - \frac{1}{2}160\cdot\frac{4}{3}N = \frac{2.680}{3}N \approx 893,3N$$

Ενώ η μέγιστη δυνατή δύναμη στατικής τριβής που θα μπορούσαμε να έχουμε είναι:

$$T_{3o\rho} = \mu_s\cdot N_3 = 0,8\cdot 1.760N = 1.408N > T_3.$$

Συνεπώς ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται, χωρίς να ολισθαίνει.

dmargaris@gmail.com