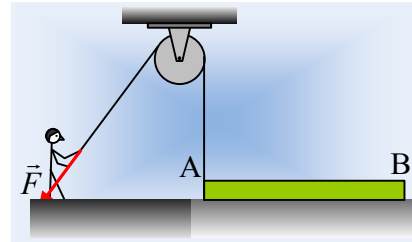


Τράβηξε για να δούμε αν τα καταφέρεις...

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα ομογενές δοκάρι AB, μήκους 4m και μάζας $M=50\text{kg}$. Θέλοντας ένα παιδί να το ανασηκώσει, δένει το ένα του άκρο A με σχοινί, το οποίο αφού περάσει από μια τροχαλία, στο άλλο του άκρο τραβάει ασκώντας δύναμη F , όπως στο σχήμα, όπου το τμήμα του νήματος μεταξύ τροχαλίας και δοκαριού, είναι κατακόρυφο.

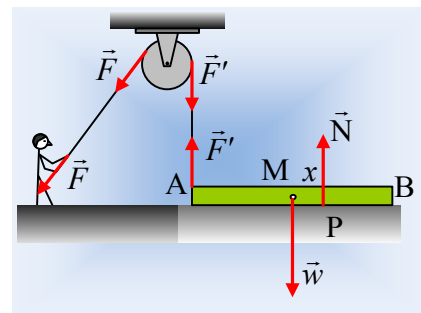


- i) Αν $F=100\text{N}$ το δοκάρι δεν ανασηκώνεται. Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκείται στο δοκάρι από το έδαφος και τη ροπή της ως προς το άκρο A, αν:
 - α) Δεν αναπτύσσονται τριβές ανάμεσα στο σχοινί και την τροχαλία.
 - β) Υπάρχουν τριβές, με αποτέλεσμα να μην γλιστράει το νήμα στο αυλάκι της τροχαλίας.
- ii) Αν κάποια στιγμή ($t_0=0$) το παιδί αυξήσει το μέτρο της δύναμης στην τιμή $F_1=300\text{N}$, το δοκάρι αρχίζει να ανασηκώνεται. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση που θα αποκτήσει, αμέσως μετά ($t=0^+$), το άκρο A του δοκαριού, όταν:
 - α) Η τροχαλία έχει μάζα $m=10\text{kg}$ και το σχοινί δεν γλιστράει στο αυλάκι της.
 - β) Η τροχαλία έχει μάζα $m=10\text{kg}$ και δεν αναπτύσσονται τριβές μεταξύ τροχαλίας και σχοινιού.
 - γ) Η τροχαλία έχει μάζα $m=0,5\text{kg}$ και το σχοινί δεν γλιστράει στο αυλάκι της.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της $I_1 = \frac{1}{2} mR^2$, η ροπή αδράνειας του δοκαριού ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον του $I_2 = (1/12)MI^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στην τροχαλία και στο δοκάρι, μόλις το παιδί τραβήξει το σχοινί, ασκώντας του δύναμη F .
 - α) Αν δεν αναπτύσσονται τριβές μεταξύ του σχοινιού και της τροχαλίας, τότε οι δυνάμεις μεταξύ τους, είναι σε κάθε θέση κάθετη στις επιφάνειες, Αλλά τότε η τάση του νήματος έχει παντού σταθερό μέτρο και $F'=F$.



- β) Αν αναπτύσσονται τριβές, εν γένει $F \neq F'$. Εδώ όμως το δοκάρι ισορροπεί και η τροχαλία δεν στρέφεται επίσης. Οπότε από την ισορροπία της παίρνουμε:

$$\sum \tau_{tp} = 0 \rightarrow F \cdot R = F' \cdot R \rightarrow F = F'$$

Συνεπώς και στις δύο περιπτώσεις η κατάσταση είναι ίδια.

Από την ισορροπία του δοκαριού παίρνουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F'+N=w \rightarrow N=Mg-F=50 \cdot 10N-100N=400N.$$

$$\Sigma \tau_A=0 \rightarrow N \cdot (AP)-w \cdot (AM)=0 \rightarrow$$

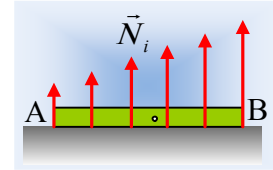
$$\tau_N = Mg(AM) = 50 \cdot 10 \cdot 2Nm = 1.000Nm$$

Σχόλιο:

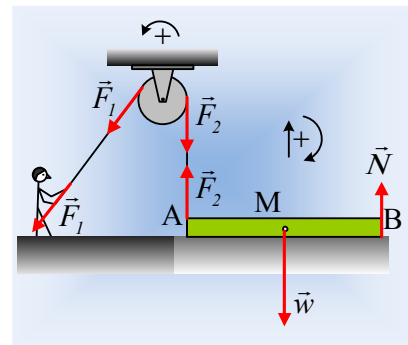
Στο σχήμα σχεδιάστηκε η κάθετη αντίδραση να περνά από ένα σημείο P, για το οποίο

$$(AP) = \frac{Mg}{N}(AM) = \frac{500}{400} 2N = 2,5m$$

Αυτό συμβαίνει επειδή στην πραγματικότητα, μόλις ασκηθεί η δύναμη F στο άκρο του δοκαριού οι δυνάμεις στήριξης (δεν είναι μια δύναμη, αφού δυνάμεις στήριξης ασκούνται από το έδαφος, σε όλη την επιφάνεια με την οποία έρχεται σε επαφή), μεταβάλλονται περίπου όπως στο σχήμα. Αλλά τότε ο φορέας της συνισταμένης τους δεν περνά από το μέσον του δοκαριού.



ii) Από τη στιγμή που το παιδί τραβήξει το σχοινί με δύναμη F_1 και το δοκάρι «αρχίζει» να ανασηκώνεται, η κάθετη αντίδραση από το επίπεδο ασκείται στο άκρο B (μόνο το άκρο του δοκαριού έρχεται σε επαφή με το επίπεδο...) και οι δυνάμεις είναι αυτές του διπλανού σχήματος.



α) Για την τροχαλία ο 2^{ος} νόμος μας δίνει:

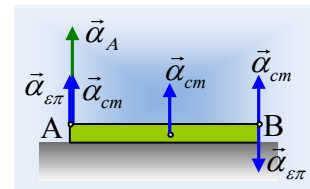
$$\Sigma \tau = I_1 \cdot \alpha_{\gamma\omega v 1} \rightarrow F_1 \cdot R - F_2 \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega v 1} \rightarrow$$

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2} m \cdot R \alpha_{\gamma\omega v 1} \quad (1)$$

Για το δοκάρι: $\Sigma F = M \cdot a_{cm} \rightarrow F_2 + N - Mg = M \cdot a_{cm} \quad (2)$

$$\Sigma \tau_M = I_2 \cdot \alpha_{\gamma\omega v 2} \rightarrow F_2 \cdot \frac{\ell}{2} - N \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{12} M \ell^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega v 2} \rightarrow F_2 - N = \frac{1}{6} M \ell \cdot \alpha_{\gamma\omega v 2} \quad (3)$$

Ερχόμαστε τώρα στις επιταχύνσεις σημείων του δοκαριού, που έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα. Αλλά το άκρο B δεν θα επιταχυνθεί, οπότε $a_{cm} = a_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega v 2} \cdot \frac{\ell}{2}$, συνεπώς $a_A = 2a_{cm}$. Αλλά



η επιτάχυνση του άκρου A είναι και επιτάχυνση του άκρου του σχοινιού, κάθε σημείο του οποίου επιταχύνεται με ίδιου μέτρου επιτάχυνση. Αλλά τότε το ίδιο μέτρο επιτάχυνσης θα έχει και το σημείο του σχοινιού που έρχεται σε επαφή με την τροχαλία, δηλαδή $a_A = \alpha_{\gamma\omega v 1} \cdot R$, οπότε οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2} m \cdot a_A \quad (1a)$$

$$F_2 + N - Mg = M \cdot \frac{\alpha_A}{2} \quad (2\alpha)$$

$$F_2 - N = \frac{1}{6} M \cdot \alpha_A \quad (3\alpha)$$

Με πρόσθεση των (2^α) και (3^α) κατά μέλη παίρνουμε:

$$2F_2 - Mg = \frac{2}{3} M \cdot \alpha_A \rightarrow F_2 - \frac{1}{2} Mg = \frac{1}{3} M \cdot \alpha_A \quad (4)$$

Οπότε από (1^α) και (4) έχουμε:

$$F_1 - \frac{1}{2} Mg = \left(\frac{1}{3} M + \frac{1}{2} m \right) \cdot \alpha_A \rightarrow$$

$$\alpha_A = \frac{6F_1 - 3Mg}{2M + 3m} \quad (5)$$

Με αντικατάσταση:

$$\alpha_A = \frac{6F_1 - 3Mg}{2M + 3m} = \frac{6 \cdot 300 - 3 \cdot 50 \cdot 10}{2 \cdot 50 + 3 \cdot 10} m/s^2 = \frac{30}{13} m/s^2 \approx 2,3 m/s^2.$$

β) Αν δεν αναπτύσσονται τριβές μεταξύ τροχαλίας και σχοινιού, τότε η τροχαλία δεν πρόκειται να περιστραφεί και $F_1 = F_2$, η τάση δηλαδή του νήματος είναι σταθερή και δεν μεταβάλλεται λόγω παρουσίας της τροχαλίας. Αλλά τότε δουλεύοντας για το δοκάρι, όπως και προηγουμένως φτάνουμε ξανά στην εξίσωση (4):

$$F_1 - \frac{1}{2} Mg = \frac{1}{3} M \cdot \alpha_A \rightarrow \alpha_A = \frac{6F_1 - 3Mg}{2M}$$

$$\alpha_A = \frac{6F_1 - 3Mg}{2M} = \frac{6 \cdot 300 - 3 \cdot 50 \cdot 10}{2 \cdot 50} m/s^2 = 3 m/s^2.$$

γ) Αν η μάζα της τροχαλίας ήταν $m=0,5\text{kg}$, με αντικατάσταση στην (5) βρίσκουμε:

$$\alpha'_A = \frac{6F_1 - 3Mg}{2M + 3m} = \frac{6 \cdot 300 - 3 \cdot 50 \cdot 10}{2 \cdot 50 + 3 \cdot 0,5} m/s^2 = \frac{300}{101,5} m/s^2 \approx 2,97 m/s^2.$$

Συμπέρασμα:

Μπορούμε να παρατηρήσουμε με βάση τις προηγούμενες τιμές επιτάχυνσης ότι στο α) είχαμε αρκετά μικρότερη επιτάχυνση ($2,3\text{m/s}^2$, αντί 3m/s^2), του άκρου Α του δοκαριού, αφού η δύναμη θα πρέπει να επιταχύνει και την τροχαλία. Αν όμως δεν υπάρχουν τριβές, η τροχαλία δεν περιστρέφεται, οπότε η δύναμη που ασκεί το παιδί «χρησιμοποιείται» για την επιτάχυνση του δοκαριού. Την ίδια όμως επιτάχυνση (σχεδόν...) αποκτά το άκρο Α και στην περίπτωση που έχουμε τριβές αλλά η τροχαλία έχει μικρή (20 φορές μικρότερη) μάζα. Είναι η περίπτωση που μπορούμε να θεωρούμε αμελητέα τη μάζα της τροχαλίας και συνήθως αναφέρεται ως «αβαρής τροχαλία».

dmargaris@gmail.com