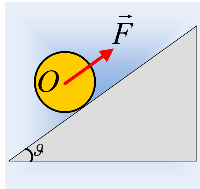
Ένας τροχός σε κεκλιμένο επίπεδο



Ένας τροχός μάζας 8kg ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ, με την επίδραση δύναμης F, η οποία μέσω κατάλληλου μηχανισμού, ασκείται στο κέντρο του Ο, όπως στο σχήμα.

i) Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό.

ii) Σε μια στιγμή (t_0=0) αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή F_1=60Ν. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του κέντρου Ο του τροχού τη στιγμή t_1=4s.

iii) Τη στιγμή t_1, το μέτρο της δύναμης αυξάνεται στην τιμή F_2=160Ν.

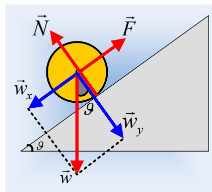
α) Να γίνει η γραφική παράσταση της ταχύτητας $υ_{cm}$ του κέντρου Ο, σε συνάρτηση με το χρόνο από 0-6s.

β) Να υπολογιστούν τα έργα της δύναμης και της τριβής, από t_0 μέχρι τη στιγμή t_2=6s.

γ) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής του τροχού, τη στιγμή t_2.

Δίνονται: Για τον τροχό Ι= ½ MR^2 ως προς οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδό του που περνά από το κέντρο του Ο, ημθ=0,6 και συνθ=0,8, g=10m/s^2, ενώ για τους συντελεστές τριβής μεταξύ τροχού και επιπέδου μ=$μ_s$=0,5.

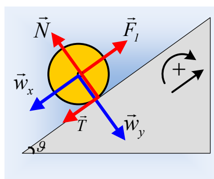
Απάντηση:



i) Ο τροχός ισορροπεί με την επίδραση τριών δυνάμεων. Της δύναμης $\vec{F}$, του βάρους $\vec{w}$ και της δύναμης από το επίπεδο. Αλλά αφού το βάρος και η F περνούν από το Ο, από το ίδιο σημείο θα διέρχεται και η δύναμη από το επίπεδο, αφού ως προς το Ο θα ισχύει Στ=0 (ισορροπία του τροχού). Έτσι οι δυνάμεις είναι αυτές του σχήματος, χωρίς να κάνει την εμφάνισή της δύναμη τριβής. Από την ισορροπία του τροχού παίρνουμε:

$$ΣF_x=0 \rightarrow F=w_x=Mg\cdot ημθ=8\cdot 10\cdot 0,6N=48N$$

$$ΣF_y=0 \rightarrow N=w_y=Mg\cdot συνθ=8\cdot 10\cdot 0,8N=64N$$



ii) Μόλις αυξήσουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F, ο τροχός τείνει να κινηθεί προς τα πάνω, οπότε θα κάνει την εμφάνισή της δύναμη τριβής, όπως στο σχήμα, η οποία αφενός τείνει να αντισταθεί στην ολίσθηση του τροχού, αφετέρου η ροπή της θα επιταχύνει περιστροφικά τον τροχό. Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

Μεταφορική κίνηση: $ΣF_x=M\cdot α_{cm} \rightarrow F_1\text{-}Mg\cdot ημθ\text{-}T_1 =M\cdot α_{cm,1}$ (1)

Στροφική κίνηση: $Στ=I\cdot α_{γων} \rightarrow T_1\cdot R= ½\, MR^2\cdot α_{γων} \rightarrow T_1= ½\, MR\cdot α_{γων,1}$ (2)

Τι κίνηση κάνει ο τροχός; Υποθέτουμε ότι ο τροχός κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει), οπότε θα ισχύει και $α_{cm,1}=α_{γων,1}R$, οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) παίρνουμε:

$$F_1 - Mg\cdot\eta\mu\theta = \frac{3}{2}Ma_{cm,1} \to (3)$$

$$a_{cm,1} = \frac{2(F_1 - Mg\cdot\eta\mu\theta)}{3M} = \frac{2(60-48)}{3\cdot 8}m/s^2 = 1m/s^2.$$

Μπορεί να ασκηθεί κατάλληλη τριβής που να εξασφαλίζει την παραπάνω επιτάχυνση; Από την (2) βρίσκουμε $T_1 = ½ Mα_{cm,1}$=4N, ενώ η μέγιστη δυνατή τιμή της στατικής τριβής έχει μέτρο $T_{ορ}=μ_s·N$=0,5·64N=32N. Άρα η ασκούμενη τριβή είναι στατική και ο τροχός κυλίεται. Αλλά τότε τη στιγμή t_1=4s η ταχύτητα του κέντρου O του τροχού έχει μέτρο:

$$υ_{cm}=α_{cm,1}\cdot t_1=1\cdot 4m/s=4m/s$$

iii) Τι θα αλλάξει στην κίνηση όταν αυξάνουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης; Προφανώς οι σχέσεις (1) και (2) ισχύουν, θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του τροχού. Το θέμα είναι η κίνηση είναι κύλιση ή όχι; Υποθέτουμε ξανά ότι έχουμε κύλιση οπότε από την (3) βρίσκουμε:

$$a_{cm,2} = \frac{2(F_2 - Mg\cdot\eta\mu\theta)}{3M} = \frac{2(160-48)}{3\cdot 8}m/s^2 = \frac{28}{3}m/s^2.$$

Αλλά τότε απαιτείται τριβή μέτρου T_2= ½ $M\cdot α_{cm,2}$≈37,3N>$T_{ορ}$!

Η υπόθεση δηλαδή ότι έχουμε κύλιση μας οδήγησε σε άτοπο.

Αυτό σημαίνει ο τροχός περιστρέφεται ενώ ταυτόχρονα ολισθαίνει και η ασκούμενη τριβή, είναι τριβή ολίσθησης, μέτρου $T_{ολ}$=32N. Αλλά τότε από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$a_{cm,2} = \frac{F_2 - Mg\cdot\eta\mu\theta - T_{ολ}}{M} = \frac{160-48-32}{8}m/s^2 = 10m/s^2.$$

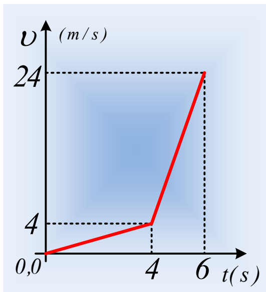
$$a_{γων,2} = \frac{2T_{ολ}}{MR} = \frac{2\cdot 32}{8R} = \frac{8}{R} \text{ (S.I.)}$$

α) Η κίνηση του κέντρου μάζας, στο χρονικό διάστημα από 4s-6s, θα είναι λοιπόν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε θα έχουμε:

$υ=υ_1+α_{cm,2}\cdot(t-t_1)$ και $Δx=υ_1(t-t_1) + ½\, α_{cm,2}\cdot(t-t_1)^2$

όπου τη στιγμή t_2 θα έχουμε:

$$υ_2=4m/s+10\cdot 2m/s=24m/s.$$



Οπότε η ζητούμενη γραφική παράσταση, είναι όπως στο διπλανό σχήμα.

β) Στο χρονικό διάστημα 0-4s το κέντρο μάζας του τροχού μετατοπίζεται κατά:

$$x_1= ½\, α_{cm,1}\cdot t_1^2= ½ \cdot 1\cdot 16m=8m$$

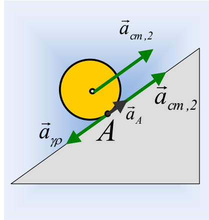
Ενώ από 4s-6s κατά:

$$x_2=υ_1(t-t_1) + ½\, α_{cm,2}\cdot(t-t_1)^2=4\cdot 2m+ ½\, 10\cdot 2^2m=28m$$

Αλλά τότε η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στον τροχό, ίση με το έργο της:

$$W_F=F_1 \cdot x_1+F_2 \cdot x_2=60 \cdot 8J+160 \cdot 28J=4.960J$$

Στο χρονικό διάστημα 0-4s η ασκούμενη τριβή είναι στατική και ασκείται σε σημείο το οποίο έχει μηδενική ταχύτητα, οπότε δεν παράγει έργο.



Για το διάστημα 4s-6s, το σημείο επαφής Α του τροχού με το έδαφος, στη διεύθυνση της κίνησης, έχει λόγω μεταφορικής κίνησης επιτάχυνση $\vec{a}_{cm,2}$ και λόγω περιστροφικής κίνησης $\vec{a}_{\gamma\rho}$ όπως στο σχήμα, όπου $\alpha_{\gamma\rho}=\alpha_{\gamma\omega\nu,2} \cdot R$ (έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση στην κάθετη διεύθυνση, η οποία δεν μας ενδιαφέρει αυτή τη στιγμή…). Αλλά τότε η επιτάχυνση του σημείου εφαρμογής της τριβής (σημείο Α) έχει επιτάχυνση:

$\alpha_A=\alpha_{cm,2}-\alpha_{\gamma\omega\nu,2} \cdot R=10m/s^2-8\ m/s^2=2\ m/s^2$ με κατεύθυνση προς τα πάνω.

Έτσι στο χρονικό αυτό διάστημα, το σημείο εφαρμογής της τριβής μετατοπίζεται κατά:

$$\Delta x_\tau= ½\ \alpha_A \cdot (\Delta t)^2= ½ \cdot 2 \cdot 2^2m=4m$$

Με αποτέλεσμα το έργο της τριβής (που μετράει τη μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική) είναι ίσο:

$$W_T=-T \cdot \Delta x_\tau=-32 \cdot 4J=-128J$$

γ) Η κινητική ενέργεια του τροχού λόγω περιστροφής μεταβάλλεται εξαιτίας της ροπής της τριβής, οπότε:

$$\frac{dK_\pi}{dt}=P\tau_T=\tau_T \cdot \omega=TR \cdot \omega$$

Αλλά τη στιγμή t_1 ο τροχός στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=\dfrac{\upsilon_1}{R}$ (κύλιση) ενώ τη στιγμή t_2 έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega_2=\omega_1+a_{\gamma\omega\nu.2}(t_2-t_1)$ οπότε:

$$\frac{dK_\pi}{dt}=TR \cdot \omega=TR \cdot \left(\frac{\upsilon_1}{R}+a_{\gamma\omega\nu,2}\Delta t\right)=T \cdot \left(\upsilon_1+Ra_{\gamma\omega\nu,2}\Delta t\right) \rightarrow$$

$$\frac{dK_\pi}{dt}=32(4+8 \cdot 2)J/s=640J/s$$

Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε να εμπλέξουμε τη μεταφορική και τη στροφική κίνηση του τροχού στον υπολογισμό του έργου της τριβής. Παραπάνω προτιμήθηκε να δουλέψουμε ενιαία, με τη μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της…

dmargaris@gmail.com