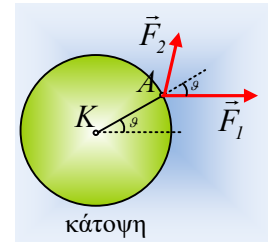


Η κίνηση του δίσκου

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας λεπτός ομογενής κυκλικός δίσκος, μάζας $m=6\text{kg}$ με το επίπεδό του οριζόντιο. Σε μια στιγμή ($t=0$) στο σημείο A της περιφέρειας του, ασκούνται δύο σταθερές οριζόντιες δυνάμεις, όπως στο σχήμα, όπου η πρώτη έχει μέτρο $F_1=5\text{N}$, ενώ $\eta\mu\theta=0,6$. Ο δίσκος κινείται χωρίς να στρέφεται και τη στιγμή $t_1=2\text{s}$ το σημείο A έχει μετατοπισθεί κατά 2m . Τη στιγμή αυτή η δύναμη F_2 παύει να ασκείται στο δίσκο.



- i) Σε ποια κατεύθυνση έχει κινηθεί το κέντρο K του δίσκου; Να δικαιολογήσετε αναλυτικά την απάντησή σας.
- ii) Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης F_2 .
- iii) Να υπολογιστούν αμέσως μετά την κατάργηση της δύναμης F_2 (τη στιγμή t_1^+):
 - α) Η επιτάχυνση του κέντρου K του δίσκου.
 - β) Η επιτάχυνση του σημείου A
 - γ) Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του σημείου A.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του $I = \frac{1}{2} mR^2$.

Απάντηση:

- i) Έστω ένα σύστημα καθέτων αξόνων x, y όπως στο διπλανό σχήμα. Αναλύουμε τις δύο δυνάμεις στους άξονες αυτούς παίρνοντας τις συνιστώσες $F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}$.

Αφού ο δίσκος δεν στρέφεται $\Sigma\tau_K=0$ ή

$$F_{2y} \cdot R - F_{1y} \cdot R = 0 \rightarrow$$

$$F_{2y} = F_{1y} = F_1 \cdot \eta\mu\theta = 5 \cdot 0,6\text{N} = 3\text{N}$$

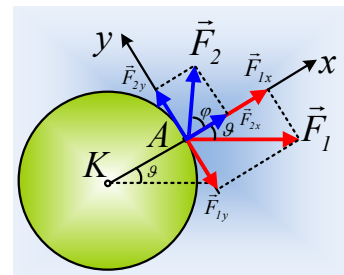
Αλλά τότε η συνισταμένη δύναμη, βρίσκεται πάνω στην διεύθυνση της ακτίνας AK, αφού $\Sigma F_y = 0$ ενώ:

$$\Sigma \vec{F} = \Sigma \vec{F}_x = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} \quad (1)$$

Συνεπώς ο δίσκος εκτελεί μεταφορική κίνηση στην διεύθυνση του άξονα x , αφού στη διεύθυνση αυτή θα αποκτήσει επιτάχυνση, σύμφωνα με το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του κέντρου μάζας K:

$$\Sigma \vec{F} = \Sigma \vec{F}_x = m \vec{a}_{cm} \quad (2)$$

- ii) Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι δυο δυνάμεις είναι σταθερές, οπότε και οι συνιστώσες στη διεύθυνση x θα είναι επίσης σταθερές. Έτσι από την (2) παίρνουμε ότι και το κέντρο μάζας αποκτά σταθερή επιτάχυνση, την ίδια που έχουν και όλα τα σημεία του δίσκου, συνεπώς



και το σημείο A, το οποίο θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, για την οποία ισχύουν:

$$x = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \quad (3) \quad \text{και} \quad v_A = v_{cm} = a_{cm} t \quad (4)$$

Έτσι από την σχέση (3) παίρνουμε:

$$a_{cm} = \frac{2x_1}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 2}{2^2} m/s^2 = 1 m/s^2$$

Με αντικατάσταση στην (2) με τη βοήθεια της (1) παίρνουμε:

$$F_{1x} + F_{2x} = ma_{cm} \rightarrow F_{2x} = ma_{cm} - F_{1x} \rightarrow$$

$$F_{2x} = ma_{cm} - F_1 \cdot \sigma \nu \nu \theta = 6 \cdot 1 N - 5 \cdot 0,8 N = 2 N$$

Κατά συνέπεια για την δύναμη F_2 έχουμε:

$$\text{Μέτρο: } F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} N = \sqrt{13} N$$

$$\text{Κατεύθυνση: } \varepsilon \phi \varphi = \frac{F_{2y}}{F_{2x}} = \frac{3 N}{2 N} = 1,5$$

iii) Αμέσως μετά την κατάργηση της δύναμης F_2 , η μόνη δύναμη που ασκείται στον δίσκο είναι η F_1 , οπότε θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο K του δίσκου, παίρνουμε από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα:

α) Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = ma_{cm1} \rightarrow$

$$a_{cm1} = \frac{F_1}{m} = \frac{5 N}{6 kg} = \frac{5}{6} m/s^2$$

με κατεύθυνση αυτή της δύναμης F_1 .

β) Το σημείο A έχει επίσης την ίδια επιτάχυνση με το κέντρο μάζας, την a_{cm1} , αλλά αν έρθουμε στην στροφική κίνηση:

$$\Sigma \tau = I \cdot a_{\gamma \omega \nu} \rightarrow F_{1y} R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot a_{\gamma \omega \nu} \rightarrow (R a_{\gamma \omega \nu}) = \frac{2 F_{1y}}{m}$$

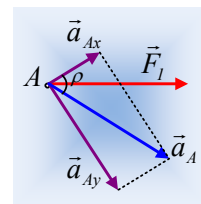
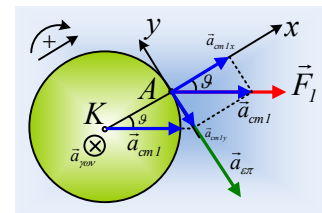
Οπότε έχει και επιτάχυνση εφαπτομενική στον κύκλο ακτίνας R με μέτρο:

$$a_{\varepsilon \pi} = (R a_{\gamma \omega \nu}) = \frac{2 F_{1y}}{m} = \frac{2 \cdot 3}{6} m/s^2 = 1 m/s^2.$$

Έτσι για την επιτάχυνση του σημείου A έχουμε, δουλεύοντας με τους άξονες x και y:

$$a_{Ax} = a_{cm1x} = a_{cm1} \cdot \sigma \nu \nu \theta = \frac{5}{6} \cdot 0,8 m/s^2 = \frac{2}{3} m/s^2$$

$$a_{Ay} = a_{\varepsilon \pi} + a_{cm1y} \rightarrow$$



$$a_{Ay} = a_{\varepsilon\pi} + a_{cmI} \cdot \eta\mu\vartheta = \left(1 + \frac{5}{6} \cdot 0,6\right) m/s^2 = 1,5 m/s^2$$

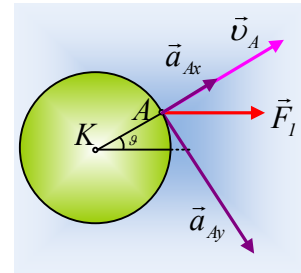
Οπότε:

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1,5^2} m/s^2 \approx 1,6 m/s^2.$$

ενώ για την κατεύθυνσή της έχουμε:

$$\varepsilon\phi\rho = \frac{a_{Ay}}{a_{Ax}} = \frac{1,5}{\frac{2}{3}} = 2,25$$

γ) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα της ταχύτητας και των συνιστωσών a_{Ax} και a_{Ay} της επιτάχυνσης, του σημείου A. Αλλά τότε η συνιστώσα a_{Ay} η οποία είναι κάθετη στην ταχύτητα, μεταβάλλει την κατεύθυνση της ταχύτητας (παίζει το ρόλο της κεντρομόλου), ενώ η συνιστώσα a_{Ax} μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας του σημείου A.



Οπότε:

$$\frac{d|v_A|}{dt} = a_{Ax} = \frac{2}{3} m/s/s$$

dmargaris@gmail.com