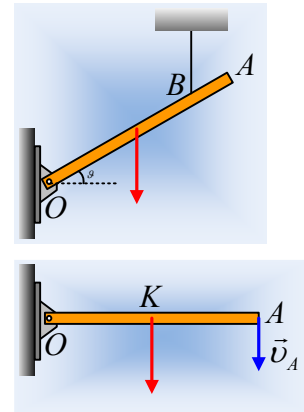


Άλλη μια ράβδος στρέφεται

Η ομογενής ράβδος του σχήματος μάζας $M=3\text{kg}$ και μήκους $l=2\text{m}$, είναι αρθρωμένη στο άκρο της O , γύρω από το οποίο μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές. Η ράβδος ισορροπεί, κρεμασμένη στο άκρο κατακόρυφου νήματος, το οποίο έχει προσδεθεί στο σημείο B , όπου $(BA)=0,4\text{m}$, σχηματίζοντας γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα, οπότε η ράβδος κατέρχεται και τη στιγμή που γίνεται οριζόντια, το άκρο της A έχει ταχύτητα $v_A=6\text{m/s}$.



- i) Για την αρχική θέση (πριν να κοπεί το νήμα), να βρεθεί η τάση του νήματος, καθώς και η γωνία θ που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση.
- ii) Να βρεθεί η κατακόρυφη επιτάχυνση του μέσου K της ράβδου καθώς και η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση, στην οριζόντια θέση.
- iii) Αναφερόμενοι στην οριζόντια θέση, δυο μαθητές, ο X και ο Y , θέλουν να υπολογίσουν τη στροφορμή και το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής ως προς το άκρο O (ισοδύναμα ως προς σταθερό οριζόντιο άξονα z κάθετο στο επίπεδο περιστροφής που περνά από το άκρο O). Ο X θεωρεί την κίνηση στροφική γύρω από τον άξονα z , ο Y θεωρεί την κίνηση σύνθετη, μια μεταφορική του κέντρου μάζας και μια περιστροφή γύρω από κάθετο άξονα που περνά από το K .

Ποιες είναι οι απαντήσεις που θα δώσουν;

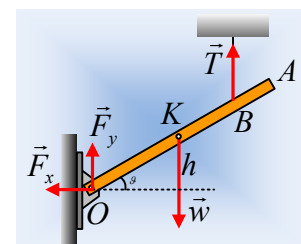
- iv) Να υπολογιστεί επίσης η στροφορμή και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ως προς:
 - α) σταθερό οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο περιστροφής που περνά από το μέσον της K της ράβδου.
 - β) σταθερό οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο περιστροφής, ο οποίος περνά από το άκρον A της ράβδου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I_{cm}=(1/12)\cdot Ml^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στην κρεμασμένη ράβδο, όπου F_x και F_y η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης από την άρθρωση.

Από την ισορροπία της ράβδου, παίρνουμε:



$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow T + F_y = Mg \\ \Sigma \tau_o = 0 \rightarrow T \cdot (OB) \cdot \sin\theta - Mg \cdot (OK) \cdot \sin\theta = 0 \rightarrow \end{cases}$$

$$T = Mg \frac{(OK)}{(OB)} = 30 \frac{1}{1,6} N = 18,75 N$$

Εξάλλου κατά την κίνηση της ράβδου, μόλις κόψουμε το νήμα, η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή, αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, δύναμη συντηρητική. Έτσι θεωρώντας τελική θέση της ράβδου, την θέση που είναι οριζόντια, όπου και $U=0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} K_{αρχ} + U_{αρχ} &= K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow \\ 0 + Mgh &= \frac{1}{2} I_o \omega^2 + 0 \rightarrow Mg \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} M \ell^2 \cdot \omega^2 \rightarrow \\ \eta\mu\theta &= \frac{\ell \omega^2}{3g} \quad (1) \end{aligned}$$

Όπου εφαρμόσαμε Steiner $\left(I_o = \frac{1}{12} M \ell^2 + M \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} M \ell^2 \right)$ για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που περνά από το άκρο O, γύρω από τον οποίο περιστρέφεται η ράβδος.

Όμως στην οριζόντια θέση $v_A = \omega \cdot \ell \rightarrow \omega = \frac{v_A}{\ell} = \frac{6}{2} \text{ rad/s} = 3 \text{ rad/s}$ και η (1) δίνει:

$$\eta\mu\theta = \frac{\ell \omega^2}{3g} = \frac{2 \cdot 3^2}{3 \cdot 10} = 0,6$$

ii) Παίρνοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση της ράβδου, γύρω από το άκρο O, στην οριζόντια θέση, βρίσκουμε:

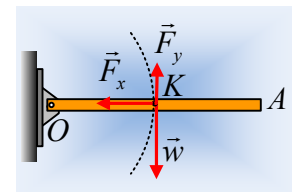
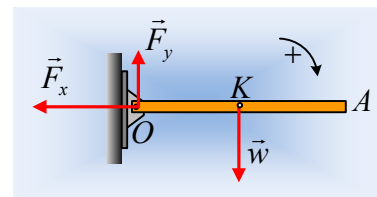
$$\Sigma \tau = I_o \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow Mg \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{3} M \ell^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot 2} \text{ rad/s}^2 = 7,5 \text{ rad/s}^2.$$

Οπότε το κέντρο μάζας K της ράβδου έχει κατακόρυφη επιτάχυνση (κάθετη στην ακτίνα OK), μέτρου:

$$a_K = a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{\ell}{2} = 7,5 \text{ m/s}^2.$$

Αλλά τότε εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την κίνη-



Για την αλλαγή της στροφορμής (ως προς το O) λόγω κίνησης του κ.μ. υπεύθυνη είναι η συνισταμένη δύναμη ($w-F_y$) η οποία θεωρώ ότι ασκείται στο K, αφού παίρνω τη ράβδο ως υλικό σημείο και $\frac{dL_1}{dt} = \Sigma \tau_o = (w - F_y) \frac{\ell}{2}$. Ενώ για τη μεταβολή της «διοστροφορμής»

έχω $\frac{dL_2}{dt} = \Sigma \tau_K = F_y \frac{\ell}{2}$. Έτσι συνολικά έχω:

$$\frac{dL_o}{dt} = \frac{dL_1}{dt} + \frac{dL_2}{dt} = (w - F_y) \frac{\ell}{2} + F_y \frac{\ell}{2} = w \frac{\ell}{2} = 30 \text{kgm}^2 / \text{s}^2.$$

Σχόλιο:

Δεν συμφωνείτε ότι οι δυο παραπάνω τρόποι των μαθητών είναι ισοδύναμοι;

iv) Ως προς κάθετο προς τη ράβδο που περνά από το κέντρο μάζας K, η ράβδος εκτελεί στροφορική κίνηση, οπότε:

$$\alpha) L_{cm} = I_{cm} \omega = \frac{1}{12} M \ell^2 \omega = \frac{1}{12} 3 \cdot 2^2 \cdot 3 \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s} = 3 \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}$$

$$\text{ενώ } \frac{dL_{cm}}{dt} = \frac{d(I_{cm} \omega)}{dt} = \frac{1}{12} M \ell^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{12} 3 \cdot 2^2 \cdot 7,5 \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s} = 7,5 \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2.$$

Με κατευθύνσεις όπως στο σχήμα.

β) Ως προς αντίστοιχο άξονα που περνά από το άκρο A, δουλεύοντας σύμφωνα με «τη λογική» του Υ μαθητή παραπάνω, θα έχουμε:

$$L_A = -M v_{cm} R + I_{cm} \omega = -M \cdot \omega \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{1}{12} M \ell^2 \omega \rightarrow$$

$$L_A = -\frac{1}{6} M \ell^2 \omega = -\frac{1}{6} 3 \cdot 2^2 \cdot 3 \text{kgm}^2 / \text{s} = -6 \text{kgm}^2 / \text{s}$$

$$\text{Και } \frac{dL_A}{dt} = \frac{d(-M v_{cm} R + I_{cm} \omega)}{dt} = -M a_{cm} \frac{\ell}{2} + \frac{1}{12} M \ell^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\frac{dL_A}{dt} = \left(-3 \cdot 7,5 \cdot 1 + \frac{1}{12} 3 \cdot 2^2 \cdot 7,5 \right) \text{kgm}^2 / \text{s}^2 = -15 \text{kgm}^2 / \text{s}^2.$$

Όπου το (-) και στις δύο παραπάνω τιμές των διανυσμάτων, σημαίνει ότι αυτά είναι κάθετα στο επίπεδο της σελίδας, με φορά προς τον αναγνώστη.

Συμπέρασμα:

Δεν υπάρχει **μια** στροφορμή της ράβδου και **ένας** ρυθμός μεταβολής της. Η στροφορμή ορίζεται ως προς ένα σημείο ή ως προς (κατά) ένα άξονα. Αν αλλάξουμε άξονα, αλλάζουμε και οι τιμές που βρίσκουμε.

dmargaris@gmail.com