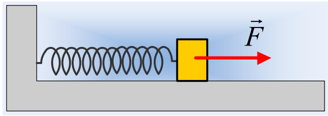
Στοιχεία από δύο ταλαντώσεις.



Ένα σώμα ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή $t_0=0$ ασκείται στο σώμα μια σταθερή οριζόντια δύναμη F με αποτέλεσμα να αρχίσει να κινείται προς τα δεξιά. Τη στιγμή t_1 το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα ενώ τη στιγμή t_2 η ταχύτητα μηδενίζεται για πρώτη φορά. Τη στιγμή αυτή η δύναμη F παύει να ασκείται στο σώμα, με αποτέλεσμα τη στιγμή t_3 το σώμα να φτάνει ξανά στην αρχική του θέση.

i) Αν K_1 η κινητική ενέργεια του σώματος τη στιγμή t_1 και K_3 η αντίστοιχη κινητική ενέργεια τη στιγμή t_3 ισχύει:

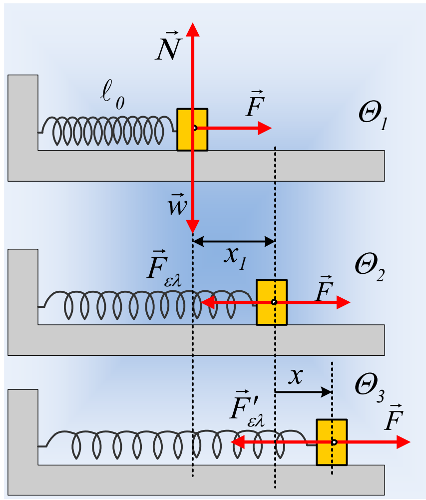
α) $K_3=K_1$, β) $K_3=2K_1$, γ) $K_3=3K_1$, δ) $K_3=4K_1$.

ii) Για τη χρονική στιγμή t_3 ισχύει:

α) $t_3=2t_2$, β) $t_3=3t_1$, γ) $t_3=3t_2$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:



Το σώμα ισορροπεί στην αρχική του θέση (Θ_1) πριν την εξάσκηση της δύναμης, συνεπώς δεν δέχεται δύναμη από το ελατήριο, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του.

Τη στιγμή t_1 φτάνει στη θέση Θ_2 όπου το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα, συνεπώς στη θέση αυτή η συνισταμένη να είναι μηδενική, αφού μέχρι τη στιγμή αυτή $F>F_{ελ}$, ενώ στη συνέχεια $F<F_{ελ}$. Συνεπώς η Θ_2 είναι μια θέση ισορροπίας στην οποία:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F=F_{ελ} \rightarrow F=kx_1 \quad (1)$$

Αν πάρουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση Θ_3, η οποία απέχει κατά x από την παραπάνω θέση ισορροπίας Θ_2, θα έχουμε:

$$\Sigma F = F - F'_{ελ} = F - k(x_1 + x) = F - kx_1 - kx \xrightarrow{(1)}$$

$$\Sigma F = -kx$$

Άρα το σώμα, για όσο χρονικό διάστημα ασκείται η δύναμη F πάνω του, εκτελεί ΑΑΤ, γύρω από τη θέση ισορροπίας Θ_2, με σταθερά επαναφοράς D=k, στην οποία η ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με:

$$E_1 = \frac{1}{2}D_1A_1^2 = \frac{1}{2}kx_1^2$$

Μόλις πάψει να ασκείται η F, το σώμα εκτελεί πια ΑΑΤ, γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας του Θ_1 με D=k και με πλάτος $2x_1$ ή με ενέργεια ταλάντωσης:

$$E_2 = \frac{1}{2} D_2 A_2^2 = \frac{1}{2} k(2x_1)^2$$

i) Τη στιγμή t_1 το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας της πρώτης ταλάντωσης και τη στιγμή t_3 από τη θέση ισορροπίας της δεύτερης ταλάντωσης, όπως τις περιγράψαμε παραπάνω. Κατά συνέπεια το σώμα και τις δυο αυτές χρονικές στιγμές έχει μέγιστη κινητική ενέργεια. Έτσι:

$$K_3 = \frac{1}{2} m\upsilon_{2,max}^2 = E_2 = \frac{1}{2} k(2x_1)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} kx_1^2 = 4E_1 = 4K_1 .$$

Σωστό το δ).

ii) Η περίοδος και των δύο παραπάνω ταλαντώσεων δίνεται από την εξίσωση:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι αυτή δεν εξαρτάται από το πλάτος ή από το αν ασκείται ή όχι η δύναμη F. Αλλά τότε το σώμα φτάνει στη Θ_2 τη στιγμή $t_1 = \frac{1}{4} T = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, ενώ παύει να ασκείται η δύναμη όταν το σώμα φτάνει στην ακραία δεξιά θέση της πρώτης ταλάντωσής του, τη στιγμή:

$$t_2 = \frac{1}{2} T = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2t_1$$

Εξάλλου ξεκινά την 2η ταλάντωσή του από την ακραία θέση του, οπότε χρειάζεται χρονικό διάστημα $\Delta t = t_3 - t_2 = \frac{1}{4} T = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ για να επιστρέψει στη θέση ισορροπίας του Θ_1. Έτσι:

$$t_3 - t_2 = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow$$

$$t_3 = t_2 + \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 3t_1 .$$

Σωστό το β).

dmargaris@gmail.com