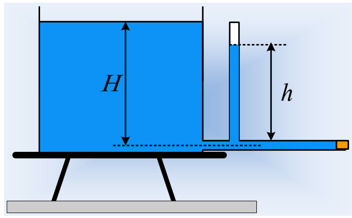
Ανοιγοκλείνουμε την τάπα και ο αέρας εγκλωβισμένος.



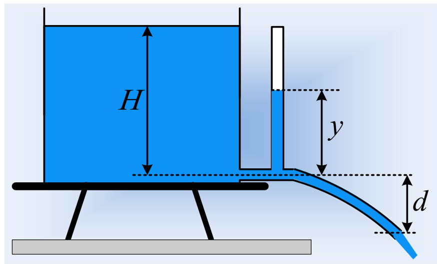
Στο σχήμα μια δεξαμενή περιέχει νερό σε ύψος H=1,25m και κοντά στον πυθμένα της συνδέεται οριζόντιος σωλήνας, διατομής 0,4cm^2, το άκρο του οποίου έχουμε κλείσει με μια τάπα. Στον σωλήνα αυτόν, έχει προσαρμοσθεί ένας δεύτερος λεπτός κατακόρυφος σωλήνας, ύψους H, κλειστός στο άνω άκρο του, εντός του οποίου το νερό έχει ανέβει κατά h=1m.

i) Πόση δύναμη δέχεται η τάπα από το νερό και ποια η πίεση του εγκλωβισμένου αέρα στον κατακόρυφο σωλήνα;

ii) Σε μια στιγμή βγάζουμε την τάπα και το νερό εκρέει από το άκρο Β του σωλήνα. Να βρεθεί η παροχή του σωλήνα.

iii) Να βρεθεί το ύψος που ανέρχεται το νερό στο κατακόρυφο σωλήνα, στη διάρκεια της παραπάνω ροής.

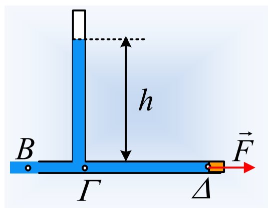
iv) Λυγίζουμε τον σωλήνα, ώστε να πάρει τη μορφή του σχήματος, όπου d=55cm. Ποιο το ύψος του νερού στον κατακόρυφο σωλήνα;



Θεωρούμε πολύ μεγάλη την ελεύθερη επιφάνεια του νερού στην δεξαμενή, το νερό ιδανικό ρευστό με πυκνότητα ρ=1.000kg/m^3 και τη ροή μόνιμη (για το χρονικό διάστημα, που πραγματοποιούμε το πείραμα). Δίνονται ακόμη g=10m/s^2 και $p_{ατμ}$=10^{5}Pa, ενώ η θερμοκρασία του εγκλωβισμένου αέρα παραμένει σταθερή. Υπενθυμίζεται δε και ο νόμος του Boyle!!! Για μια ποσότητα αερίου σε σταθερή θερμοκρασία pV=σταθ.

Απάντηση:

i) Τα σημεία Β, Γ και Δ βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο εντός του υγρού, οπότε για τις πιέσεις ισχύει:



$$p_B=p_Γ=p_Δ.$$

Αλλά $p_B=p_{ατμ}+ρgH=10^5Pa+1.000·10·1,25Pa=1,125·10^5Pa$

Οπότε η τάπα δέχεται οριζόντια δύναμη, όπως στο σχήμα, μέτρου:

$$F=p_Δ·A=1,125·10^5·0,4·10^{-4}N=4,5N$$

Εξάλλου $p_Γ=p_{αερ}+ρgh$, όπου $p_{αερ}$ η πίεση του αερίου στον κατακόρυφο σωλήνα, πάνω από το νερό, οπότε:

$$p_{αερ}=p_Γ-ρgh=1,125·10^5Pa-1.000·10·1Pa=1,025·10^5Pa.$$

ii) Θεωρώντας μόνιμη στρωτή ροή ιδανικού ρευστού, με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli ανάμεσα σε ένα σημείο της επιφάνειας του νερού στο δοχείο Κ και του άκρου Δ, παίρνουμε:

$$p_{ατ}+ρgH+\frac{1}{2}ρυ_K^2=p_{ατ}+\frac{1}{2}ρυ_Δ^2 \rightarrow$$

$$υ_Δ=\sqrt{2gH}=\sqrt{2·10·1,25}m/s=5m/s$$

Αφού θεωρούμε πολύ μεγάλη την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, με αποτέλεσμα $\upsilon_K \approx 0$.

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν παίρναμε το θεώρημα του Torricelli…)

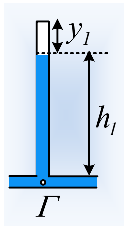
iii) Η εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των διατομών Γ και Δ του οριζόντιου σωλήνα, μας δίνει:

$$\upsilon_\Gamma \cdot A_\Gamma = \upsilon_\Delta \cdot A_\Delta \rightarrow \upsilon_\Gamma = \upsilon_\Delta = 5m/s$$

Αλλά τότε από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ Γ και Δ έχουμε:

$$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 = p_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Delta^2 \rightarrow p_\Gamma = p_\Delta = p_{\alpha\tau}$$

Αλλά το σημείο Γ βρίσκεται στο κάτω τμήμα του κατακόρυφου σωλήνα που περιέχει υγρό σε ισορροπία, οπότε:



$$p_\Gamma = p_{1\alpha\varepsilon\rho} + \rho g h_1 \quad (1)$$

Όπου h_1 το νέο ύψος του νερού στο σωλήνα.

Αφού η θερμοκρασία του εγκλωβισμένου αέρα παραμένει σταθερή, μεταξύ της αρχικής ποσότητας του αέρα και της τελικής, ισχύει ο νόμος Boyle:

$$p_{\alpha\varepsilon\rho} \cdot V_{\alpha\rho\chi} = p_{1\alpha\varepsilon\rho} \cdot V_1 \rightarrow p_{\alpha\varepsilon\rho} \cdot A_1 \cdot y = p_{1\alpha\varepsilon\rho} \cdot A_1 \cdot y_1 \rightarrow$$

$$p_{1\alpha\varepsilon\rho} = p_{\alpha\varepsilon\rho} \cdot \frac{y}{y_1} \quad (2)$$

Όπου y=H-h=0,25m, ενώ $h_1 = H - y_1$ και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$p_\Gamma = p_{\alpha\varepsilon\rho} \cdot \frac{y}{y_1} + \rho g(H - y_1) \quad (3) \rightarrow$$

$$10^5 = 1{,}025 \cdot 10^5 \frac{0{,}25}{y_1} + 1.000 \cdot 10 \cdot (1{,}25 - y_1) \rightarrow$$

$$y_1^2 + 8{,}75 y_1 - \frac{10{,}25}{4} = 0 \quad (4)$$

Η λύση της οποίας δίνει $y_1 \approx 0{,}28m$ οπότε $h_1 = H - y_1 = 97cm$.

iv) Δουλεύοντας ξανά όπως στο ερώτημα ii) παίρνουμε με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli ανάμεσα σε ένα σημείο της επιφάνειας του νερού στο δοχείο Κ και του άκρου Δ, παίρνουμε:

$$p_{\alpha\tau} + \rho g(H + d) + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(H + d)} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}8} m/s = 6m/s$$

Η εξίσωση της συνέχειας μεταξύ Γ και Δ δίνει ξανά $\upsilon_\Gamma = \upsilon_1 = 6m/s$ και εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli μεταξύ Γ και Δ έχουμε:

$$p'_\Gamma + \rho g d + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 = p_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Delta^2 \rightarrow p'_\Gamma = p_{\alpha\tau} - \rho g d \text{ ή}$$

$$p'_\Gamma = 10^5 P\alpha - 1.000 \cdot 10 \cdot 0{,}55 Pa = 0{,}945 \cdot 10^5 Pa$$

Αν ονομάσουμε y_2 το νέο ύψος του αέρα στον κατακόρυφο σωλήνα, με αντικατάσταση στην (3), έχουμε:

$$p'_{\Gamma} = p_{\alpha\varepsilon\rho} \cdot \frac{y}{y_2} + \rho g(H - y_2) \rightarrow$$

$$0,945 \cdot 10^5 = 1,025 \cdot 10^5 \frac{0,25}{y_2} + 1.000 \cdot 10 \cdot (1,25 - y_2) \rightarrow$$

$$y_2^2 + 8,2 y_2 - \frac{10,25}{4} = 0 \quad (4\alpha)$$

Η λύση της οποίας δίνει y_2=0,3m, οπότε $h_2 = H - y_2 = 95cm$.

dmargaris@gmail.com