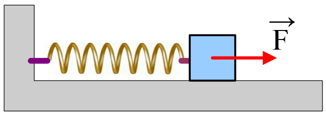
Μια εξαναγκασμένη ταλάντωση και ενέργειες.



Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=25N/m. Σε μια στιγμή δέχεται περιοδική οριζόντια δύναμη F, με αποτέλεσμα να αρχίσει να ταλαντώνεται. Μόλις αποκατασταθεί σταθερή κατάσταση, λαμβάνοντας κάποια στιγμή σαν t=0, βρίσκουμε ότι το σώμα εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης

$$x=0{,}4\cdot ημ(πt) \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας του. Στη διάρκεια της ταλάντωσης το σώμα δέχεται δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{απ}= - 4υ$ (S.I.), όπου υ η ταχύτητα του σώματος.

i) Να βρεθούν η ιδιοσυχνότητα και η συχνότητα ταλάντωσης του σώματος.

ii) Για την χρονική στιγμή t_1=1s ζητούνται:

α) Η κινητική και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης και το άθροισμά τους K+U.

β) Ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα, μέσω του έργου της δύναμης απόσβεσης.

iii) Για τη χρονική στιγμή t_2=13/6 s να υπολογιστούν:

α) Η κινητική και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης και το άθροισμά τους K+U.

β) Οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής και δυναμικής ενέργειας.

γ) Ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα εξαιτίας της δύναμης απόσβεσης καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο σώμα μέσω της εξωτερικής δύναμης F.

Απάντηση:

i) Η ιδιοσυχνότητα δίνεται από την εξίσωση:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25}{2}}Hz \approx 0{,}56Hz$$

Ενώ η συχνότητα ταλάντωσης είναι ίση με $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi}Hz = 0{,}5Hz$

ii) Τη στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_1= 0{,}4\cdot ημπt_1=0{,}4\cdot ημπ = 0$, έχοντας ταχύτητα:

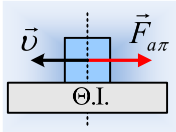
$$υ=\omega\cdot A\cdot συν20t_1=- 0{,}4\pi\ m/s$$

και επιτάχυνση $α= - \omega^2\cdot A\cdot ημωt_1= 0$

α) Άρα $K= ½\, mυ^2 = ½ \cdot 2\cdot(0{,}4\pi)^2 = 1{,}58J$, ενώ $U= ½\, kx^2 = 0$. Αλλά τότε:

$$K+U= 1{,}58J.$$

β) Ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα (μετατρεπόμενη σε θερμότητα) είναι ίσος με την ισχύ της δύναμης απόσβεσης:

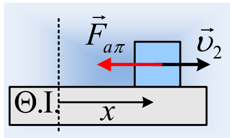


$$P_{F_{\alpha\pi}} = \frac{dW_{F_{\alpha\pi}}}{dt} = \frac{|F_{\alpha\pi}| \cdot |dx| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = |F_{\alpha\pi}| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Όπου α η γωνία μεταξύ δύναμης και ταχύτητας, εδώ α=180°, ενώ $|F_{\alpha\pi}| = b\upsilon$, οπότε:

$$\frac{dW_{F_{\alpha\pi}}}{dt} = |F_{\alpha\pi}| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = b\upsilon^2(-1) = -4(0{,}4\pi)^2 J/s \approx -6{,}3 J/s$$

iii) Τη στιγμή t_2 το σώμα βρίσκεται στη θέση x_2= 0,4·ημπt_2= $0{,}4 \cdot \eta\mu\left(\frac{13\pi}{6}\right) = 0{,}2m$



έχοντας ταχύτητα:

$$\upsilon_2 = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \pi \cdot 0{,}4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}2\pi\sqrt{3} m/s$$

και επιτάχυνση $\alpha_2 = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu\omega t_2 = -\omega^2 \cdot x = -2m/s^2$. (πήραμε $\pi^2 \approx 10$)

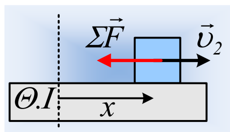
α) Συνεπώς τη στιγμή αυτή:

$$K_2 = ½\, m\upsilon^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot \left(0{,}2\pi\sqrt{3}\right)^2 J \approx 1{,}18J$$

$$U_2 = ½\, kx^2 = \frac{1}{2} 25 \cdot 0{,}2^2 J = 0{,}5J$$

Αλλά τότε: $K_2+U_2=1,68J$.

β) Για τους ρυθμούς μεταβολής των ενεργειών έχουμε:



$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{o\lambda}}{dt} = |\Sigma F| \cdot |\upsilon_2| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = m|a| \cdot |\upsilon_2| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = -m|a| \cdot |\upsilon_2|$$

$$\frac{dK}{dt} = -2 \cdot 2 \cdot 0{,}2\pi\sqrt{3} J/s = -0{,}8\pi\sqrt{3} J/s \approx -4{,}4 J/s$$

Ενώ $\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt} = -|F_{\varepsilon\pi}| \cdot |\upsilon_2| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \mathrm{k}x_2 \cdot |\upsilon_2| \rightarrow$

$$\frac{dU}{dt} = 25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2\pi\sqrt{3} J/s = \pi\sqrt{3} J/s \approx 5{,}4 J/s$$

γ) Ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα, μέσω της δύναμης απόσβεσης είναι:

$$\frac{dW_{F_{\alpha\pi}}}{dt} = |F_{\alpha\pi}| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = -b\upsilon^2 = -4 \cdot \left(0{,}2\pi\sqrt{3}\right)^2 J/s \approx -4{,}7J/s$$

Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο σώμα μέσω της δύναμης F είναι:

$$\frac{dW_F}{dt} = |F| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Αλλά από το 2ο νόμο του Νεύτωνα τη στιγμή t_2 παίρνουμε:

$$\Sigma F = ma \to F + F_{\alpha\pi} + F_{\varepsilon\pi} = ma \to F - b\upsilon - \mathrm{kx} = \mathrm{m\alpha} \to$$

$$F = b\upsilon + \mathrm{kx} + \mathrm{m\alpha} = \left(4 \cdot 0{,}2\pi\sqrt{3} + 25 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot (-2)\right)N = 5{,}3N$$

με φορά ίδια με της ταχύτητας (θετική τιμή), οπότε:

$$\frac{dW_F}{dt} = |F| \cdot |\upsilon| = 5{,}3N \cdot 0{,}2\pi\sqrt{3}m/s \approx 5{,}7J/s$$

Σχόλιο:

Υποστηρίζεται ότι μπορούμε να μιλάμε για την «ενέργεια ταλάντωσης» στη διάρκεια μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης. Για να δούμε αν αυτό είναι μια λογική άποψη, θα πρέπει να υπάρχει κάποια ποσότητα που να «διατηρείται». Διατηρείται σταθερό το άθροισμα K+U, στην παραπάνω ταλάντωση; Προφανώς όχι, συνεπώς δεν έχει καμιά πρακτική αξία να ορίσουμε «ενέργεια ταλάντωσης» σε μια εξαναγκασμένη…

Αξίζει να προσεχθούν επίσης δύο σημεία:

α) Τη στιγμή t_2 οι ρυθμοί μεταβολής κινητικής ενέργειας και δυναμικής ενέργειας δεν είναι αντίθετοι (πράγμα που με άλλα λόγια εκφράζει την διατήρηση).

β) Η διατήρηση της ενέργειας εδώ εκφράζεται αν προσέξουμε τον «ισολογισμό»:

Μέσω της εξωτερικής δύναμης μεταφέρεται στο σώμα ενέργεια 5,7J/s, από τα οποία, τα 4,7J/s αφαιρούνται μέσω της δύναμης απόσβεσης, ενώ το υπόλοιπο 1J/s αυξάνει την μηχανική ενέργεια, αφού:

dK/dt+dU/dt= -4,4J/s+5,4J/s = +1J/s.

dmargaris@gmail.com