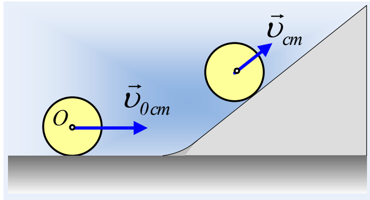
Μια σφαίρα παίρνει την ανηφόρα



Σε οριζόντιο επίπεδο κυλίεται μια σφαίρα με ταχύτητα κέντρου μάζας υ_{0cm}=6m/s. Σε μια στιγμή συναντά στην πορεία της ένα κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ (ημθ=0,6), στο οποίο συνεχίζει την κίνησή της, χωρίς να αναπηδήσει.

i) Αν το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο, σε πόσο ύψος θα ανέβη το κέντρο Ο της σφαίρας;

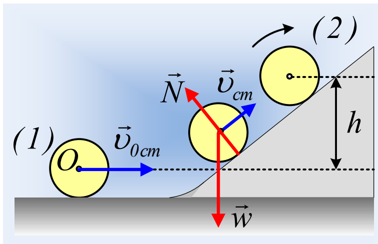
ii) Αν υπήρχε τριβή, με αποτέλεσμα να συνεχίσει η σφαίρα την κύλισή της, ποιο θα ήταν το αντίστοιχο μέγιστο ύψος ανόδου;

iii) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής, μεταξύ σφαίρας και κεκλιμένου επιπέδου, για την παραπάνω άνοδο;

iii) Αν μεταξύ σφαίρας και κεκλιμένου επιπέδου είχαμε συντελεστές τριβής $\mu=\mu_{ορ}$=0,125, πόση θερμική ενέργεια αναπτύσσεται κατά την άνοδο της σφαίρας κατά μήκος του επιπέδου, αν η ακτίνα της σφαίρας ήταν R=0,2m και η μάζα της 1kg.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας I= 2/5 mR^2, ενώ g=10m/s^2.

Απάντηση:

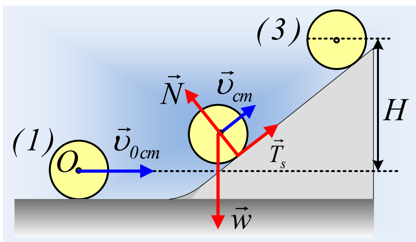


i) Αν το επίπεδο είναι λείο, τότε οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι αυτές του διπλανού σχήματος, οπότε η σφαίρα επιβραδύνεται μεταφορικά, χωρίς όμως να υπάρχει κάποια ροπή που να μεταβάλλει την γωνιακή της ταχύτητα. Επειδή η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, δύναμη συντηρητική, η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή, οπότε θεωρώντας τη δυναμική ενέργεια της σφαίρας στο οριζόντιο επίπεδο μηδενική, παίρνουμε:

$$K_1+U_1=K_2+U_2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{0cm}^2+\frac{1}{2}I\omega_0^2+0=0+\frac{1}{2}I\omega_0^2+mgh \rightarrow$$

$$h=\frac{\upsilon_{0cm}^2}{2g}=\frac{6^2}{2\cdot 10}m=1{,}8m$$



ii) Αν η σφαίρα κυλίεται κατά την κίνησή της στο κεκλιμένο επίπεδο, τότε δέχεται επιπλέον και δύναμη στατικής τριβής, όπως στο σχήμα, η οποία όμως δεν παράγει έργο, αφού, κάθε στιγμή, ασκείται σε σημείο μηδενικής ταχύτητας. Η ροπή της στατικής τριβής επιβραδύνει την περιστροφική κίνηση της σφαίρας, με αποτέλεσμα σε κάθε θέση να ισχύει $υ_{cm}=ωR$, οπότε στο ανώτερο σημείο (3) όπου $υ_{cm}=0$, να έχουμε και ω=0. Αλλά τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε ξανά την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, όπως προηγούμενα:

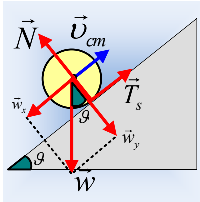
$$K_1+U_1=K_3+U_3 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{0cm}^2+\frac{1}{2}I\omega_0^2+0=0+mgH \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{0cm}^2+\frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega_0^2=mgH \rightarrow \frac{7}{10}m\upsilon_{0cm}^2=mgH$$

$$H=\frac{7\upsilon_{0cm}^2}{10g}=\frac{7\cdot 6^2}{100}m=2{,}52m$$

iii) Ας δούμε λίγο αναλυτικότερα τι γίνεται με τις ασκούμενες δυνάμεις (διπλανό σχήμα). Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα και δουλεύοντας με τα μέτρα των μεγεθών έχουμε:



Μεταφορική κίνηση: $ΣF_x=mα_{cm} \rightarrow mg·ημθ-T_s=mα_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $Στ=I·α_{γων} \rightarrow T_s·R= (2/5)mR^2·α_{γων} \rightarrow$

$$T_s=(2/5)m(R·α_{γων}) \quad (2)$$

Αλλά αφού η σφαίρα κυλίεται ισχύει και $α_{cm}=α_{γων}R$ (3), οπότε από (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$$mg·ημθ=mα_{cm}+(2/5)mα_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm}=\frac{5gημθ}{7}$$

Οπότε παίρνουμε $T_s=\frac{2}{5}ma_{cm}=\frac{2}{5}m\frac{5gημθ}{7}=\frac{2}{7}mgημθ$

Για να είναι η τριβή αυτή στατική πρέπει $T_s \le T_{ορ}$ ή

$$\frac{2}{7}mgημθ \le \mu_{ορ}\cdot N \rightarrow \mu_{ορ} \ge \frac{2mgημθ}{7N} \rightarrow$$

$$\mu_{ορ} \ge \frac{2mgημθ}{7\cdot mgσυνθ} \rightarrow$$

$$\mu_{ορ} \ge \frac{2}{7}εφθ \rightarrow \mu_{ορ} \ge \frac{2}{7}\frac{0{,}6}{0{,}8} \rightarrow \mu_{ορ} \ge \frac{3}{14}$$

(ημθ=0,6 οπότε συνθ=0,8, αφού $ημ^2θ+συν^2θ=1$)

iv) Προφανώς αφού $μ=μ_{ορ}=0{,}125$, τιμή μικρότερη από αυτήν που υπολογίσαμε παραπάνω, η σφαίρα ανέρχεται κατά μήκος του επιπέδου, ολισθαίνοντας, οπότε η τριβή είναι τριβή ολίσθησης με μέτρο:

$$T=\mu N=\mu mgσυνθ=0{,}125\cdot 1\cdot 10\cdot 0{,}8N=1N$$

Παίρνοντας ξανά το 2^o νόμο θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, έχουμε:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \rightarrow mg\cdot\eta\mu\theta - T = m\alpha_{cm}$ (1α)

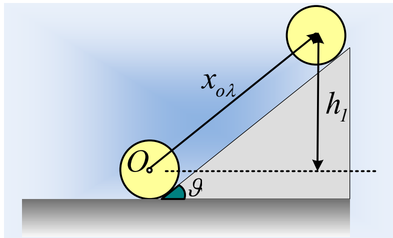
Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R = (2/5)mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$

$$T = (2/5)m(R\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}) \quad (2\alpha)$$

Από (1α) βρίσκουμε $\alpha_{cm} = g\eta\mu\theta - \frac{T}{m} = (10\cdot 0{,}6 - 1)m/s^2 = 5m/s^2$.

Η επιτάχυνση αυτή έχει φορά αντίθετη της ταχύτητας του κέντρου μάζας, οπότε η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη, για την οποία ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon_{cm} = \upsilon_{0cm} - \alpha_{cm}\cdot t \xRightarrow{\upsilon_{cm}=0} t = \dfrac{\upsilon_{0cm}}{a_{cm}} \ (4) \\ x = \upsilon_{0cm}t - ½\,\alpha_{cm}t^2 \end{array}\right\} x_{o\lambda} = \frac{\upsilon_{0cm}^2}{2a_{cm}} = \frac{6^2}{2\cdot 5}m = 3{,}6m$$

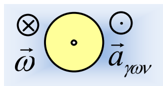


Η σφαίρα λοιπόν σταμάτησε να μεταφέρεται κατά μήκος του επιπέδου, μόλις φτάσει σε ύψος:

$$h_1 = x_{o\lambda}\cdot\eta\mu\theta = 3{,}6\cdot 0{,}6m = 2{,}16m.$$

Πάμε στην περιστροφή, όπου από την (2α) έχουμε:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{5T}{2mR} = \frac{5\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 0{,}2}rad/s^2 = 12{,}5rad/s^2.$$



Η γωνιακή αυτή επιτάχυνση έχει επίσης κατεύθυνση αντίθετη της γωνιακής ταχύτητας, οπότε πρόκειται για «επιβράδυνση» και κατ' αντιστοιχία της μεταφορικής κίνησης έχουμε:

$$\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t \quad (5) \quad \text{και} \quad \Delta\theta = \omega_0 t - ½\,\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2 \quad (6)$$

Με βάση την (4) ο χρόνος ανόδου είναι $t = \frac{\upsilon_{0cm}}{a_{cm}} = \frac{6}{5}s = 1{,}2s$ και με αντικατάσταση στην (5) βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας, μόλις σταματήσει η άνοδός της:

$$\omega_1 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t = \frac{\upsilon_{ocm}}{R} - a_{\gamma\omega\nu}t = \left(\frac{6}{0{,}2} - 12{,}5\cdot 1{,}2\right)rad/s = 15rad/s.$$

Εφαρμόζοντας την διατήρηση της ενέργειας ανάμεσα σε μια θέση στο οριζόντιο επίπεδο και στη θέση σε ύψος h_1 παίρνουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} + Q_\theta$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{0cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 + mgh_1 + Q_\theta$$

Όπου Q_θ η θερμική ενέργεια εξαιτίας της τριβής ολίσθησης. Οπότε:

$$Q_\theta = \frac{1}{2}m\upsilon_{0cm}^2 + \frac{1}{5}m\upsilon_{0cm}^2 - \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega_1^2 - mgh_1 \rightarrow$$

$$Q_\theta = \frac{7}{10} m\upsilon_{0cm}^2 - \frac{1}{5} mR^2\omega_1^2 - mgh_1 \rightarrow$$

$$Q_\theta = \frac{7}{10} 1\cdot 6^2 J - \frac{1}{5} 1\cdot 0{,}2^2 \cdot 15^2 J - 1\cdot 10\cdot 2{,}16 J = 1{,}8J$$

Σχόλια:

1) Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στα τρία πρώτα ερωτήματα, οι απαντήσεις δόθηκαν χωρίς να γνωρίζουμε μάζα και ακτίνα της σφαίρας. Πράγμα που σημαίνει ότι ανεξαρτήτως συγκεκριμένων τιμών η απάντηση είναι ίδια, για όλες τις σφαίρες!

2) Για να υπολογίσουμε την μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική, θα μπορούσαμε να βρούμε την απόσταση κατά την οποία γλίστρησε η σφαίρα.

   Αν αντικαταστήσουμε στην (6) την τιμή του χρόνου, βρίσκουμε:

   $$\Delta\theta=\omega_0 t - ½\ \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 = 27\text{rad}$$

   Αλλά τότε ήρθε σε επαφή με το επίπεδο, μήκος τόξου $\Delta s=\Delta\theta\cdot R=5{,}4\text{m}$, οπότε η σφαίρα γλίστρησε κατά:

   $$d=\Delta s - x_{o\lambda}=1{,}8\text{m}$$

   Αλλά τότε το έργο της τριβής είναι ίσο:

   $$W_T=-T\cdot d=-1{,}8\text{J}$$

   Οπότε η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική είναι $Q_\theta=1{,}8\text{J}$.

dmargaris@gmail.com