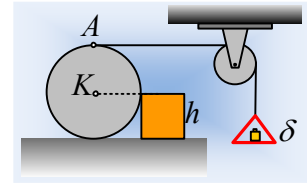


## Ισορροπίες και τριβές

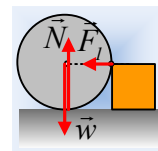
Γύρω από έναν τροχό ακτίνας  $R$  και μάζας  $M=10\text{kg}$ , τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, το οποίο αφού το περάσουμε από μια αβαρή τροχαλία, στο άλλο άκρο του κρεμάμε έναν αβαρή δίσκο. Ο τροχός ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής  $\mu=\mu_s=0,6$ , ενώ εμποδίζεται να κινηθεί από ένα ακλόνητο εμπόδιο ύψους  $h=R$ , με το οποίο ο τροχός δεν εμφανίζει τριβές.



- i) Να βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό, πριν βάλουμε κάποια σταθμά στο δίσκο.
  - ii) Μπορεί ο τροχός να υπερπηδήσει το εμπόδιο, αν τοποθετήσουμε στο δίσκο κατάλληλα σταθμά;
  - iii) Τοποθετούμε στο δίσκο σταθμά μάζας  $m=2\text{kg}$ . Να εξετάσετε αν ο δίσκος θα κατέβει ή όχι, υπολογίζοντας και την δύναμη που ασκεί το εμπόδιο στον τροχό.
  - iv) Αν το οριζόντιο επίπεδο ήταν λείο, ενώ αντίθετα αναπτυσσόταν τριβές μεταξύ τροχού και εμποδίου με συντελεστές τριβής  $\mu=\mu_s=0,6$ , τότε:
    - α) Να υπολογιστεί η δύναμη στον τροχό από το οριζόντιο επίπεδο, όταν στο δίσκο βάζαμε σταθμά  $m_1=2,5\text{kg}$ .
    - β) Ποια η μάζα των σταθμών που πρέπει να τοποθετηθούν στο δίσκο, ώστε ο τροχός να χάσει την επαφή του με το οριζόντιο επίπεδο;
- Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του  $I= \frac{1}{2} MR^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

### Απάντηση:

- i) Από τη στιγμή που ο δίσκος είναι αβαρής, η τάση του νήματος είναι μηδενική, οπότε δεν ασκείται κάποια δύναμη στον τροχό. Εξάλλου αφού δεν αναπτύσσονται τριβές μεταξύ εμποδίου και τροχού, η δύναμη που ασκείται στον τροχό από το εμπόδιο, η  $F_1$ , είναι κάθετη στην επιφάνεια του τροχού, συνεπώς κατευθύνεται προς το κέντρο  $K$  του τροχού. Έτσι οι δυνάμεις είναι όπως στο σχήμα, αφού δεν αναπτύσσονται τριβές μεταξύ τροχού και εδάφους. Αν υπήρχε τριβή θα προκαλούσε την περιστροφή του τροχού. Αλλά τότε από την ισορροπία του τροχού παίρνουμε:

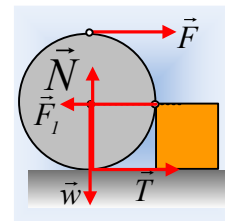


$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F_1=0 \text{ και}$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N=w=Mg=100\text{N}$$

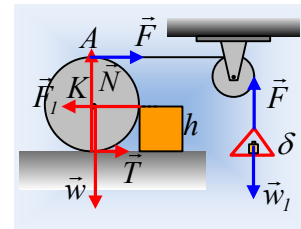
Τελικά βλέπουμε δηλαδή ότι δεν ασκείται κάποια δύναμη στον τροχό από το εμπόδιο.

- ii) Έστω ότι έχουμε τοποθετήσει κατάλληλα σταθμά στο δίσκο με αποτέλεσμα να ασκείται δύναμη  $F$  στον τροχό, όπως στο σχήμα. Αλλά η δύναμη αυτή θα προκαλέσει την εμφάνιση δύο ακόμη οριζόντιων δυ-



νάμεων. Της  $F_1$  από το εμπόδιο και της τριβής με το έδαφος. Στην κατακόρυφη διεύθυνση όμως δεν αλλάζει κάτι, οπότε  $N=w$  και ο τροχός δεν πρόκειται να ανυψωθεί.

- iii) Μόλις τοποθετήσουμε σταθμά στο δίσκο, τότε το νήμα τεντώνεται ασκώντας δύναμη  $F$  στον τροχό. Έτσι οι εμφανιζόμενες δυνάμεις είναι όπως στο διπλανό σχήμα. Δεν γνωρίζουμε αν ο δίσκος επιταχυνθεί προς τα κάτω ή όχι.



Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο δίσκος ισορροπεί. Τότε θα ισορροπεί και ο τροχός, οπότε θα έχουμε:

$$\Sigma F_{\delta}=0 \rightarrow F=w_1=mg=20N$$

$$\Sigma F_{\tau,x}=0 \rightarrow F+T-F_1=0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_{\tau,y}=0 \rightarrow N=w=100N$$

$$\Sigma \tau_K=0 \rightarrow F \cdot R-T \cdot R=0 \rightarrow T=F=20N$$

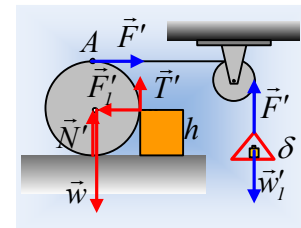
Μπορεί να αναπτυχθεί αυτή η τριβή; Βρίσκουμε την οριακή τριβή:

$$T_{op}=T_{s,max}=\mu_s \cdot N=0,6 \cdot 100N=60N$$

Συνεπώς θα εμφανιστεί στατική τριβή μέτρου 20N και η ισορροπία είναι εφικτή. Αλλά τότε από την σχέση (1) βρίσκουμε:

$$F_1=F+T=2F=40N.$$

- iv) Τώρα τριβή αναπτύσσεται στην επαφή με το εμπόδιο, με αποτέλεσμα οι δυνάμεις να είναι όπως στο διπλανό σχήμα.



- α) Και πάλι δεν γνωρίζουμε αν ισορροπεί ο δίσκος (με τα σταθμά). Ας υποθέσουμε ξανά ότι έχουμε ισορροπία, οπότε θα ισχύει:

$$\Sigma F_{\delta}=0 \rightarrow F'=w_1'=m_1 g=25N$$

$$\Sigma F_{\tau,x}=0 \rightarrow F'-F_1'=0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_{\tau,y}=0 \rightarrow N'+T'=w \quad (3)$$

$$\Sigma \tau_K=0 \rightarrow F' \cdot R-T' \cdot R=0 \rightarrow T'=F'=25N$$

Αλλά τότε από την (2) έχουμε και  $F_1'=25N$ .

Μπορούμε να έχουμε τριβή μέτρου 25N; Υπολογίζουμε την οριακή τριβή και βρίσκουμε:

$$T'_{op}=\mu_s \cdot F_1'=0,6 \cdot 25N=15N < T'$$

Συνεπώς τριβή με μέτρο 25N, δεν μπορεί να ασκηθεί και η υπόθεσή μας ήταν λανθασμένη. Αυτό σημαίνει ότι ο δίσκος επιταχύνεται. Αλλά τότε, ο τροχός τι κάνει; Μπορεί απλά να περιστρέφεται, αλλά μπορεί και να μετακινείται και μεταφορικά υπερπηδώντας το εμπόδιο! Ας υποθέσουμε ότι απλά αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του  $K$ , αποκτώντας μια γωνιακή επιτάχυνση  $\alpha_{γων}$ . Θα έχουμε:

$$\Sigma F_{\delta}=m_1 \cdot a_1 \rightarrow w_1'-F'=m_1 \cdot a_1 \quad (4)$$

$$\Sigma F_{\tau,x}=0 \rightarrow F'-F_1'=0 \quad (5)$$

$$\Sigma F_{\tau,y}=0 \rightarrow N'+T'=w \quad (6)$$

$$\Sigma \tau_K = I \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F' \cdot R - T' \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \rightarrow F' - T' = \frac{1}{2} M(\alpha_{\gamma\omega\nu} R) \quad (7)$$

Αλλά αν  $a_1$  είναι η επιτάχυνση με την οποία κατεβαίνει ο δίσκος, την ίδια επιτάχυνση έχει και κάθε σημείο του νήματος, κατά συνέπεια και το σημείο Α του τροχού, το οποίο εφάπτεται το νήμα. Αλλά το σημείο Α έχει επιτρόχια επιτάχυνση  $a_{A,επ} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ , οπότε η (7) γίνεται:

$$F' - T' = \frac{1}{2} M a_1 \quad (7^a)$$

Αλλά η τριβή, είναι τριβή ολίσθησης (ο τροχός περιστρέφεται...) οπότε  $T' = \mu \cdot F_1'$  και από (5)  $T' = \mu F'$  και αφού  $\mu = 0,6$  η (7<sup>a</sup>) γίνεται:

$$0,4F' = \frac{1}{2} M a_1 \quad (7\beta)$$

Από (4) και (7β) παίρνουμε:

$$a_1 = \frac{0,8m_1g}{M + 0,8m_1} = \frac{0,8 \cdot 2,5 \cdot 10}{10 + 0,8 \cdot 2,5} m/s^2 = \frac{5}{3} m/s^2.$$

Οπότε  $F' = 125/6 N$  και από (6):

$$N' = Mg - T' = Mg - \mu \cdot F' = 100N - 0,6 \frac{125}{6} N = 87,5N$$

Πράγμα που σημαίνει ότι πράγματι ο τροχός βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος περιστρεφόμενος γύρω από τον άξονά του.

β) Ας **υποθέσουμε** ότι έχουμε βάλει τέτοια μάζα σταθμών, ώστε οριακά ο τροχός να εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο, πράγμα που ισοδύναμα σημαίνει ότι μηδενίζεται η δύναμη N. Στην οριακή αυτή κατάσταση, θεωρούμε ότι ο τροχός συνεχίζει να ισορροπεί, όσον αφορά τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζα του K, οπότε από τις παραπάνω εξισώσεις θα έχουμε:

Από την (6)  $T = w = 100N$ , ενώ  $F = F_1 = \frac{T}{\mu} = \frac{100}{0,6} N = \frac{500}{3} N$  και από (7<sup>a</sup>) παίρνουμε:

$$a = \frac{2(F - T)}{M} = \frac{2(\frac{500}{3} - 100)}{10} m/s^2 = \frac{40}{3} m/s^2 \approx 13,3 m/s^2!!!$$

Λογικό; Ο δίσκος «πέφτει» με επιτάχυνση μεγαλύτερη από g!!! Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει η τάση του νήματος να είχε φορά προς τα κάτω. Δηλαδή το νήμα να έσπρωχνε...

Συμπέρασμα: Δεν υπάρχει περίπτωση ο τροχός να χάσει την επαφή με το έδαφος, όσο και να είναι το βάρος των σταθμών στο δίσκο. Πολύ δε περισσότερο να υπερπηδήσει το εμπόδιο.

### Σχόλιο:

Τι θα μπορούσε να συμβεί όμως, αν ο συντελεστής μεταξύ τροχού και εμποδίου είχε τιμή  $\mu = \mu_s = 1$ ; Με την ίδια, όπως παραπάνω λογική, θα βρίσκαμε ότι και  $F = 100N$ , οπότε  $a = 0$ .

Πράγμα που σημαίνει ότι αν βάζαμε στο δίσκο σταθμά με μάζα 10kg, τότε  $F=F_1=100\text{N}$  και ο τροχός θα έχανε την επαφή με το έδαφος, ισορροπώντας.

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)