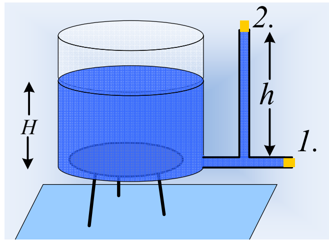
Η δύναμη από το υγρό στις τάπες.



Διαθέτουμε μια μεγάλη κυλινδρική δεξαμενή νερού με βάθος H=1,25m, στο κάτω μέρος της οποίας συνδέεται ένας οριζόντιος σωλήνας διατομής $A=2cm^2$, ο οποίος κλείνεται με την τάπα 1. Στο σωλήνα αυτό έχει συνδεθεί ένας δεύτερος κατακόρυφος σωλήνας, ίδιας διατομής και ύψους h=2m, το πάνω μέρος του οποίου κλείνεται με την τάπα 2. Ο κατακόρυφος σωλήνας είναι γεμάτος με νερό.

i) Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκεί το νερό στις δυο τάπες.

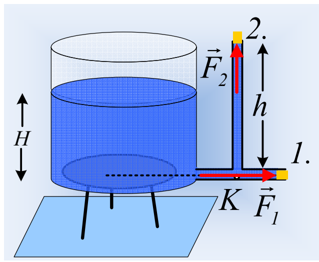
ii) Ανοίγουμε την τάπα 1. στο άκρο του οριζόντιου σωλήνα και αποκαθίσταται μια μόνιμη ροή. Να βρεθεί η παροχή του οριζόντιου σωλήνα.

iii) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί τώρα το νερό στην τάπα 2.

iv) Ανοίγουμε και την τάπα 2. Μόλις σταθεροποιηθεί ξανά η ροή, ποιο το ύψος του νερού στον κατακόρυφο σωλήνα;

Το νερό θεωρείται ιδανικό ρευστό πυκνότητας $\rho=1.000kg/m^3$, ενώ σε όλη τη διάρκεια της ροής θεωρείται σταθερό το ύψος του νερού στη δεξαμενή. Δίνονται επίσης $p_{ατμ}=10^5N/m^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Ο οριζόντιος σωλήνας έχει μικρή διατομή (ακτίνα περίπου 0,8cm) οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι σε όλα τα σημεία της επικρατεί η ίδια πίεση, ίση με αυτή που έχουμε στον πυθμένα της δεξαμενής.

$$p_1 = p_K = p_{ατμ} + \rho g H$$

Οπότε η τάπα 1. δέχεται οριζόντια δύναμη μέτρου:

$$F_1 = p_1 A = \left(p_{ατμ} + \rho g H\right)A \rightarrow$$

$$F_1 = \left(10^5 + 1.000 \cdot 10 \cdot 1,25\right)\cdot 2 \cdot 10^{-4}\,N = 22,5N$$

Πάμε τώρα στον κατακόρυφο σωλήνα. Αν p_2 η πίεση του νερού στην επιφάνεια της τάπας, τότε ασκείται πάνω της κατακόρυφη δύναμη μέτρου $F_2 = p_2 A$. Αλλά για τις πιέσεις στα δυο άκρα του σωλήνα έχουμε:

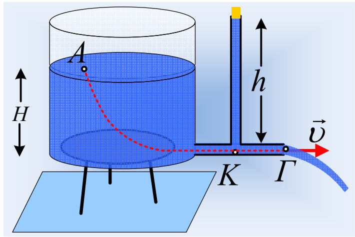
$$p_K = p_2 + \rho g h \rightarrow p_{ατμ} + \rho g H = p_2 + \rho g h \rightarrow$$

$$p_2 = p_{ατμ} + \rho g H - \rho g h \text{ και}$$

$$F_2 = p_2 A = \left(p_{ατμ} + \rho g(H - h)\right)A \rightarrow$$

$$F_2 = \left(10^5 + 1.000 \cdot 10(1,25 - 2)\right)\cdot 2 \cdot 10^{-4}\,N = 18,5N$$

ii) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli ανάμεσα σε ένα σημείο Α της επιφάνειας της δεξαμενής και σε ένα σημείο Γ στην έξοδο του οριζόντιου σωλήνα, όπου το νερό ρέει με ταχύτητα υ. Παίρνοντας σαν επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Γ και αφού $p_A=p_Γ=p_{ατμ}$ έχουμε:



$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho g H + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{2gH} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 1{,}25}\,m/s = 5m/s$$

Οπότε η παροχή του σωλήνα είναι:

$$\Pi = A\cdot\upsilon = 2\cdot 10^{-4}\cdot 5m^3/s = 10^{-3}m^3/s = 1L/s$$

iii) Εφαρμόζουμε ξανά την εξίσωση Bernoulli ανάμεσα στο σημείο Κ, στη βάση του κατακόρυφου σωλήνα και στο σημείο Γ στην έξοδο του οριζόντιου σωλήνα:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \quad (1)$$

Αλλά από την εξίσωση της συνέχειας $A_K\cdot\upsilon_K = A_\Gamma\cdot\upsilon \rightarrow \upsilon_K = \upsilon$, οπότε από την (1) $p_K = p_{\alpha\tau\mu}$.

Για την στήλη του νερού στον κατακόρυφο σωλήνα, αν p'_2 η πίεση στην επιφάνεια της τάπας 2. ισχύει:

$$p_K = p'_2 + \rho g h \rightarrow p'_2 = p_{\alpha\tau\mu} - \rho g h\,,$$

Και η αντίστοιχη δύναμη που ασκεί το νερό στην τάπα έχει μέτρο:

$$F'_2 = p'_2 A = \left(p_{\alpha\tau\mu} - \rho g h\right)A \rightarrow$$

$$F'_2 = \left(10^5 - 1.000\cdot 10\cdot 2\right)\cdot 2\cdot 10^{-4}\,N = 16N$$

iv) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, μόλις αποκατασταθεί ξανά μόνιμη ροή, η πίεση στο σημείο Κ είναι ίση με την ατμοσφαιρική, οπότε ο σωλήνας θα αδειάσει και το ύψος του νερού στο εσωτερικό του θα μηδενιστεί (h΄=0).

dmargaris@gmail.com