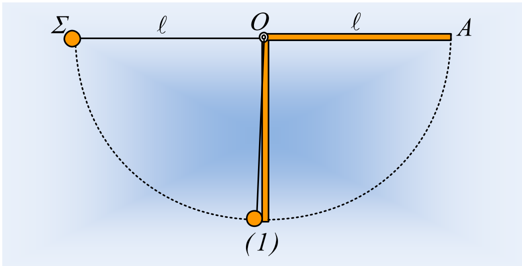
Μια κρούση ράβδου με υλικό σημείο

Ένα υλικό σημείο Σ μάζας m είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους ℓ, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό οριζόντιο άξονα Ο. Γύρω από τον ίδιο άξονα μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές και μια ομογενής λεπτή ράβδος (ΟΑ) της ίδιας μάζας και μήκους επίσης ℓ. Αφήνουμε ταυτόχρονα τα δυο σώματα να κινηθούν σε κατακόρυφο επίπεδο, από την οριζόντια θέση, όπως στο σχήμα.



i) Το σώμα Σ θα συγκρουστεί με το άκρο Α της ράβδου:

α) στην κατακόρυφη θέση (1), β) δεξιά της θέσης (1), γ) αριστερά της θέσης (1)

ii) Ελάχιστα πριν την κρούση μεγαλύτερη κινητική ενέργεια έχει:

α) Το σώμα Σ, β) η ράβδος (ΟΑ), γ) έχουν ίσες κινητικές ενέργειες.

iii) Ελάχιστα πριν την κρούση μεγαλύτερη κατά μέτρο ταχύτητα έχει:

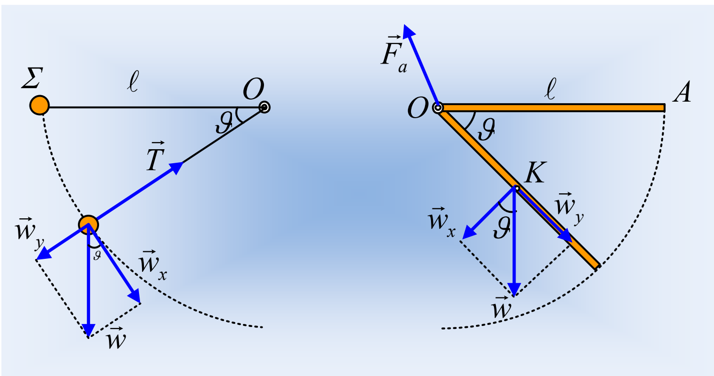
α) Το σώμα Σ, β) το άκρο Α της ράβδου, γ) Έχουν ταχύτητες ίσου μέτρου.

iv) Αν ακολουθήσει πλαστική κρούση και το σώμα Σ κολλήσει στη ράβδο, τότε αμέσως μετά το στερεό που προκύπτει, θα περιστραφεί με την φορά των δεικτών του ρολογιού ή αντίθετα;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το άκρο της Ο: $I= 1/3\ m\ell^2$.

Απάντηση:

i) Στο παρακάτω σχήμα και σε μια τυχαία θέση των δύο σωμάτων όπου το νήμα και η ράβδος σχηματίζουν την ίδια γωνία με την αρχική οριζόντια διεύθυνση, έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στα δυο σώματα.



Για την γωνιακή επιτάχυνση του σώματος Σ έχουμε $w_x=m\alpha_{1x} \rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\theta=m\alpha_{1\gamma\omega\nu}\cdot \ell \rightarrow$

$$a_{1\gamma\omega\nu}=\frac{g}{\ell}\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

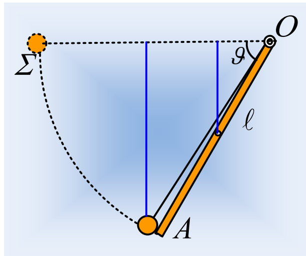
Για την ράβδο:

$$\Sigma\tau = I_A \cdot \alpha_{2\gamma\omega\nu} \rightarrow mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \frac{\ell}{2} = \frac{1}{3} m\ell^2 a_{2\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{2\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell} \sigma\upsilon\nu\vartheta = 1{,}5 a_{1\gamma\omega\nu}$$

Δηλαδή σε κάθε θέση η ράβδος έχει μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση, οπότε θα κινηθεί γρηγορότερα και θα φτάσει πιο σύντομα στην κατακόρυφη θέση. Αλλά τότε η σύγκρουση θα γίνει αριστερά της κατακόρυφης θέσης. Σωστό το γ).

ii) Έστω ότι τα δυο σώματα συγκρούονται στη θέση του σχήματος, όπου η γωνία που σχηματίζει το νήμα με την αρχική του, οριζόντια θέση, γωνία θ. Θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την κατώτερη θέση του υλικού σημείου Σ, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας και αφού η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή, θα έχουμε:



Για το υλικό σημείο Σ:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda,\Sigma} = U_{\alpha\rho\chi} = mg\,\ell \cdot \eta\mu\theta \quad (1)$$

Για την ράβδο Ρ:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda,\rho} + mg\,½\,\ell \cdot \eta\mu\theta = mg\,\ell \cdot \eta\mu\theta \rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda,\rho} = ½\,mg\,\ell \cdot \eta\mu\theta \quad (2)$$

Σωστή η πρόταση α).

iii) Από την σχέση (1) παίρνουμε $\frac{1}{2} m\upsilon_\Sigma^2 = mg\ell \cdot \eta\mu\theta \rightarrow \upsilon_\Sigma = \sqrt{2g\ell\,\eta\mu\theta}$, ενώ από την (2):

$$\frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} mg\ell \cdot \eta\mu\theta \rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{3} m\ell^2\omega^2 = \frac{1}{2} mg\ell \cdot \eta\mu\theta \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g \cdot \eta\mu\theta}{\ell}} \rightarrow$$

$$\upsilon_A = \omega\ell = \sqrt{3g\ell \cdot \eta\mu\theta}$$

Σωστή η β) πρόταση.

iv) Εφαρμόζουμε για την κρούση την αρχή διατήρησης της στροφορμής, ως προς τον οριζόντιο άξονα που περνά από το Ο, θεωρώντας θετική την αντιωρολογιακή φορά:

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow m\upsilon_\Sigma \ell - I_\rho \omega = L_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow$$

$$L_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = m\sqrt{2g\ell\,\eta\mu\theta} \cdot \ell - \frac{1}{3} m\ell^2 \cdot \sqrt{\frac{3g \cdot \eta\mu\theta}{\ell}} = m\ell\left(\sqrt{2 \cdot g\ell\,\eta\mu\theta} - \sqrt{\frac{1}{3} \cdot g\ell\,\eta\mu\theta}\right) > 0$$

Το συσσωμάτωμα δηλαδή μετά την κρούση στρέφεται αντίθετα από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

dmargaris@sch.gr