Μια ταχύτητα και η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης.

Ένα σώμα μάζας 1kg εκτελεί ΑΑΤ και σε μια στιγμή (t_0=0) περνάει από μια θέση Β, κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση, με ταχύτητα μέτρου $υ_1$=0,4m/s. Μετά από λίγο αποκτά την μέγιστη ταχύτητά του 0,5m/s, ενώ στη συνέχεια επιβραδύνεται και μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητά του στη θέση Γ, αφού διανύσει απόσταση (ΒΓ)=0,8m.

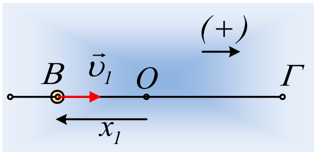
i) Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης και η απομάκρυνσή του στη θέση Β.

ii) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σώματος στις θέσεις Β και Γ.

iii) Να βρεθεί η θέση του σώματος, τη στιγμή t΄=5π/2 s.

iv) Να κάνετε το διάγραμμα της (συνισταμένης) δύναμης που ασκείται στο σώμα, από το Β στο Γ, σε συνάρτηση με την μετατόπιση από την αρχική θέση Β. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα της μετατόπισης. Τι μετράει το παραπάνω εμβαδόν;

Απάντηση:



i) Αφού τη στιγμή t_0 το σώμα κινείται προς τη θετική κατεύθυνση (έστω προς τα δεξιά) και μετά από λίγο φτάνει στη θέση ισορροπίας, όπου και αποκτά τη μέγιστη ταχύτητά του, σημαίνει ότι το σημείο Β βρίσκεται σε αρνητική απομάκρυνση, όπως στο σχήμα, ενώ το σημείο Γ είναι σε θέση πλάτους.

Από την ενέργεια ταλάντωσης έχουμε:

$$K_B + U_B = E_τ \rightarrow \frac{1}{2}mυ_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}mυ_{max}^2 \rightarrow$$

$$mυ_1^2 + mω^2x_1^2 = mυ_{max}^2 \rightarrow$$

$$|ωx_1| = \sqrt{υ_{\max}^2 - υ_1^2} = \sqrt{0{,}5^2 - 0{,}4^2}\,m/s = 0{,}3m/s \quad (1)$$

Όπου $|x_1|$ το μέτρο της απομάκρυνσης.

Εξάλλου, για τη μέγιστη ταχύτητα έχουμε $υ_{max}$=ω·Α (2)

Με διαίρεση των (1) και δύο κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{ω|x_1|}{ωA} = \frac{0{,}3}{0{,}5} \rightarrow |x_1| = 0{,}6A$$

Ενώ με βάση και το σχήμα $|x_1| + A = d \rightarrow 1{,}6A = 0{,}8 \rightarrow A = 0{,}5m$, οπότε x_1= -0,3m.

ii) Επιστρέφοντας στην σχέση (2) παίρνουμε $ω = \frac{υ_{\max}}{A} = \frac{0{,}5}{0{,}5}rad/s = 1rad/s$ οπότε για τις επιταχύνσεις έχουμε:

$$α_B = -ω^2x_1 = -1^2(-0{,}3)m/s^2 = +0{,}3m/s^2$$

$$α_Γ = -ω^2x_Γ = -1^2(0{,}5)m/s^2 = -0{,}5m/s^2$$

iii) Έστω ότι η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι x=Αημ(ωt+φ$_0$), οπότε η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι της μορφής:

$$\upsilon=\upsilon_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0)$$

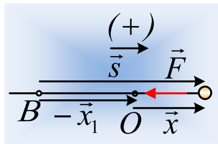
Και με αντικατάσταση t=0, παίρνουμε:

$$0{,}4=0{,}5\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi_0 \rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0=0{,}8$$

Αλλά τότε η θέση του σώματος τη στιγμή t΄ είναι ίση:

$$x'=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)=0{,}5\cdot\eta\mu\left(1\cdot\frac{5\pi}{2}+\varphi_0\right)=0{,}5\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi_0=0{,}4m$$

iv) Στο σώμα ασκείται δύναμη επαναφοράς της μορφής F=mα=-mω^2·x. Έστω το σώμα σε μια τυχαία θέση έχοντας μετατοπισθεί κατά s από την αρχική του θέση Β, όπως στο διπλανό σχήμα. Η παραπάνω δύναμη γράφεται, λαμβάνοντας υπόψη ότι



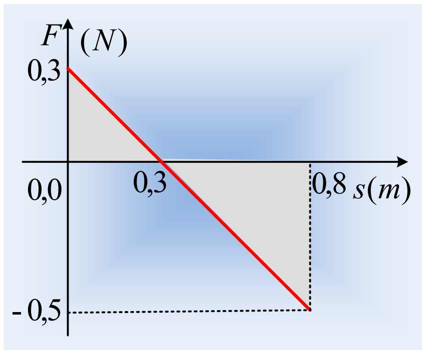
$$\vec{s}=-\vec{x}_1+\vec{x} \rightarrow x=s+x_1$$

$$F=-m\omega^2\cdot(s+x_1)=-m\omega^2 s-m\omega^2 x_1$$

Και με αντικατάσταση:

$$F=-1\cdot1^2 s-1\cdot1^2\cdot(-0{,}3)=-s+0{,}3 \quad \text{(S.I.)}$$

Με μορφή αυτή του διπλανού σχήματος.



Εξάλλου το συνολικό εμβαδόν των δύο χωρίων με γκρι χρώμα είναι:

$$E_{o\lambda}=\frac{1}{2}0{,}3\cdot0{,}3m^2-\frac{1}{2}0{,}5\cdot0{,}5m^2=-0{,}08m^2$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το αντίστοιχο έργο της δύναμης επαναφοράς είναι $W_{o\lambda}$=-0,08J.

Πράγματι εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου- ενέργειας για το σώμα από τη θέση Β στη θέση Γ έχουμε:

$$K_\Gamma-K_B=W_{o\lambda}\rightarrow$$

$$W_{o\lambda}=\frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2-\frac{1}{2}m\upsilon_B^2=0-\frac{1}{2}1\cdot0{,}4^2J=-0{,}08J$$

dmargaris@gmail.com