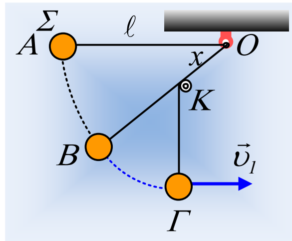
Κάποια στιγμή το παιχνίδι τελειώνει… Γ.



Μια μικρή σφαίρα Σ μάζας m_1=0,5kg ηρεμεί στο άκρο κατακόρυφου νήματος, μήκους l=0,9m, το άλλο άκρο του οποίου έχει προσδεθεί σε σταθερό σημείο Ο. Μετακινούμε τη σφαίρα φέρνοντάς την στη θέση Α όπου το νήμα είναι οριζόντιο (αλλά και τεντωμένο) και την αφήνουμε να κινηθεί. Μετά από λίγο το νήμα σχηματίζει γωνία θ=30° με την οριζόντια διεύθυνση, για πρώτη φορά, θέση Β.

i) Να υπολογίστε την τάση του νήματος στη θέση Β, καθώς και τον ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας.

ii) Να βρεθεί η στροφορμή της σφαίρας, καθώς και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της, ως προς το σημείο Ο.

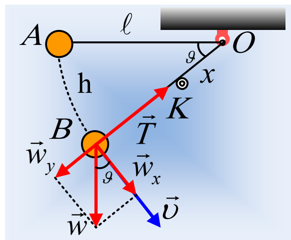
Τη στιγμή που η σφαίρα Σ φτάνει στη θέση Β, το νήμα συναντά ένα καρφί, στο σημείο Κ, όπου (ΟΚ)=x, πάνω στο οποίο το νήμα εκτρέπεται, με αποτέλεσμα μετά από λίγο η σφαίρα να φτάνει στη θέση Γ, έχοντας οριζόντια ταχύτητα υ_1. Στη θέση αυτή η σφαίρα Σ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη σφαίρα μάζας m_2=1,5kg η οποία κινείται αντίθετα με ταχύτητα μέτρου υ_2=1m/s. Αμέσως μετά την κρούση, η δεύτερη σφαίρα αποκτά ταχύτητα υ_2'=1,5m/s με φορά προς τα δεξιά.

iii) Να υπολογίσετε την ταχύτητα της σφαίρας Σ ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κρούση.

iv) Να υπολογιστεί η απόσταση (ΟΚ)=x, στην οποία βρίσκεται το καρφί που εκτρέπει το νήμα.

Δίνεται g=10m/s^2, ημθ= ½ και συνθ =√3/2.

Απάντηση:



i) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Β, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Β, ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας και παίρνουμε:

$$K_A+U_A=K_B+U_B\rightarrow$$

$$0+mgh=\frac{1}{2}m\upsilon^2+0\rightarrow\upsilon=\sqrt{2gh}=\sqrt{2g\ell\eta\mu\theta}\rightarrow$$

$$\upsilon=\sqrt{2g\ell\eta\mu\theta}=\sqrt{2\cdot10\cdot0{,}9\cdot0{,}5}m/s=3m/s$$

Οπότε στην διεύθυνση της ακτίνας ΒΟ έχουμε:

$$\Sigma F_R=m\frac{\upsilon^2}{R}\rightarrow T-mg\eta\mu\theta=m\frac{\upsilon^2}{\ell}\rightarrow$$

$$T=mg\eta\mu\theta+m\frac{\upsilon^2}{\ell}=0{,}5\cdot10\cdot\frac{1}{2}N+0{,}5\frac{3^2}{0{,}9}N=7{,}5N$$

Ενώ στην εφαπτομενική διεύθυνση έχουμε:

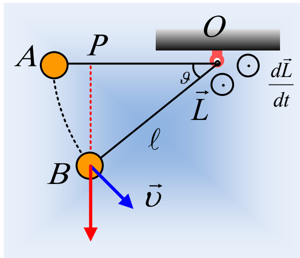
$$\Sigma F_x = m\alpha \rightarrow mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = m\frac{d\upsilon}{dt} \rightarrow$$

$$\frac{d(\omega R)}{dt} = g\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{g\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{R} \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{g\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{\ell} = \frac{10\cdot\sqrt{3}/2}{0,9} rad/s^2 \approx 9,6 rad/s^2.$$

Με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του σχήματος στο κέντρο Ο, με φορά προς τον αναγνώστη.

ii) Η στροφορμή της σφαίρας ως προς το Ο έχει μέτρο:



$$L = m\upsilon R = 0,5\cdot 3\cdot 0,9 kgm^2/s = 1,35 kgm^2/s$$

Και κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του σχήματος, στο Ο, με φορά προς τα έξω, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το Ο έχει μέτρο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = \tau_w = mg(OP) = mg\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

$$\frac{dL}{dt} = mg\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 0,5\cdot 10\cdot 0,9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} kgm^2/s^2 = 2,25\sqrt{3} kgm^2/s^2$$

Εναλλακτικά: $\frac{dL}{dt} = \frac{(m\upsilon R)}{dt} = maR = m\ell^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} = 2,25\sqrt{3} kgm^2/s^2$.

Και ίδια κατεύθυνση με τη στροφορμή.

iii) Έστω υ_1 η ταχύτητα της σφαίρας Σ ελάχιστα πριν την κρούση. Τότε οι ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κεντρική και ελαστική μεταξύ τους κρούση, δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad (1)$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad (2)$$

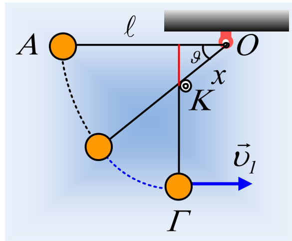
Με αντικατάσταση των τιμών των ταχυτήτων στην (2), θεωρώντας την προς τα δεξιά θετική, έχουμε:

$$1,5 = \frac{2\cdot 0,5}{0,5+1,5}\upsilon_1 + \frac{1,5-0,5}{0,5+1,5}(-1) \rightarrow \upsilon_1 = 4m/s$$

Ενώ με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{0,5-1,5}{0,5+1,5}4 + \frac{2\cdot 1,5}{0,5+1,5}(-1) = -3,5m/s.$$

iv) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ, θεωρώντας U_Γ=0:



$$K_A+U_A=K_Γ+U_Γ\rightarrow$$

$$0+mgh=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+0\rightarrow mg\big(x\cdot ημθ+(\ell-x)\big)=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2\rightarrow$$

$$2gx\cdot ημθ+2g\ell-2gx=\upsilon_1^2\rightarrow x=\frac{2g\ell-\upsilon_1^2}{2g(1-ημθ)}\rightarrow$$

$$x=\frac{2\cdot 10\cdot 0,9-4^2}{2\cdot 10(1-\frac{1}{2})}m=0,2m$$

dmargaris@gmail.com