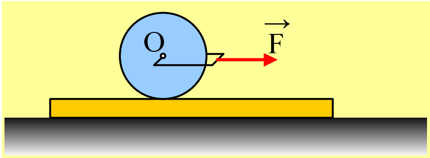
# *Ένας τροχός πάνω σε σανίδα.*




Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας τροχός μάζας M=10kg, πάνω σε μια σανίδα μάζας m=5kg. Οι συντελεστές τριβής μεταξύ τροχού και σανίδας είναι ίσοι $\mu=\mu_s=0{,}2$. Σε μια στιγμή $t_0=0$ ασκούμε στο κέντρο του τροχού, μια οριζόντια σταθερή δύναμη F=50N, μέχρι τη χρονική $t_1=2s$, οπότε παρατηρούμε ότι ο τροχός αρχίζει να κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει), ενώ ταυτόχρονα η σανίδα ολισθαίνει πάνω στο επίπεδο. Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I=\frac{1}{2}MR^2$ και $g=10m/s^2$.

i) Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό και στην σανίδα.

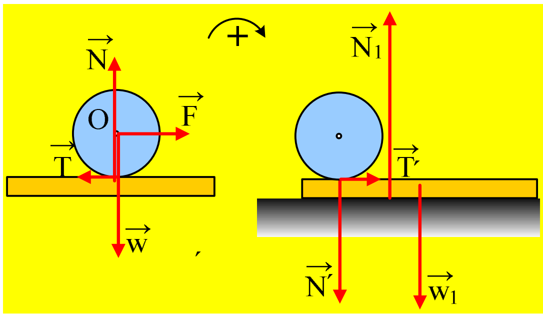
ii) Να βρεθεί η επιτάχυνση της σανίδας.

iii) Να υπολογιστεί η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σύστημα, μέσω του έργου της δύναμης F.

iv) Πώς κατανέμεται η παραπάνω ενέργεια σε τροχό και σανίδα;

v) Θέλουμε στο παραπάνω χρονικό διάστημα $t_1=2s$ να πετύχουμε την μέγιστη δυνατή μετακίνηση του άξονα του τροχού. Για να το πετύχουμε αυξάνουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F, χωρίς όμως να ολισθήσει ο τροχός πάνω στην σανίδα. Ποιο το κατάλληλο μέτρο της δύναμης F και ποιο είναι το ελάχιστο αναγκαίο μήκος της σανίδας;

Απάντηση:

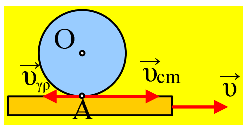



i) Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις σε κάθε σώμα χωριστά, όπου Τ η στατική τριβή που ασκείται στον τροχό και Ν η κάθετη αντίδραση από την σανίδα και όπου έχουμε τα ζευγάρια δράσης αντίδρασης Τ-Τ΄, Ν-Ν΄.

ii) Για την μεταφορική κίνηση του τροχού εχουμε: $\Sigma F_x=M\alpha_{cm} \rightarrow F-T=M\alpha_{cm}$ (1)

Για την περιστροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R=\frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow 2T=MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Για την σανίδα: $\Sigma F=m\alpha \rightarrow T=m\alpha$ (3)




Τι σημαίνει τώρα ότι ο τροχός δεν ολισθαίνει; Ας πάρουμε ένα σημείο Α, επαφής του τροχού με την σανίδα. Δεν ολισθαίνει, σημαίνει ότι το σημείο αυτό, δεν έχει ταχύτητα **ως προς τη σανίδα** ή ισοδύναμα έχει κάθε στιγμή ίδια ταχύτητα με την σανίδα.

Αλλά το σημείο Α, θεωρώντας ότι ο τροχός εκτελεί σύνθετη κίνηση, έχει μια ταχύτητα $\upsilon_{cm}$ εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης του τροχού και μια $\upsilon_{\gamma\rho}$ λόγω της κυκλκής του κίνησης, όπως εμφανίζονται στο διπλανό σχήμα. Συνεπώς $\upsilon=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho} \rightarrow \upsilon=\upsilon_{cm}-\omega\cdot R$, οπότε με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}-\frac{d\omega}{dt}R \text{ ή}$$

$$\alpha=\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \quad (4)$$

Με αφαίρεση των (1) και (2) κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$F-3T= M(\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R) \rightarrow F-3T=M\alpha \ (5)$$

Οπότε με βάση την (3) η παραπάνω εξίσωση γίνεται $F-3m\alpha=M\alpha \rightarrow$

$$a=\frac{F}{3m+M}=\frac{50}{3\cdot 5+10}m/s^2=2m/s^2$$

iii) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σύστημα μέσω της δύναμης είναι ίση με το έργο της F. Αλλά από την εξίσωση (5) βρίσκουμε $T=\frac{F-Ma}{3}=\frac{50N-10\cdot 2N}{3}=10N$ και από την (1) παίρνουμε:

$$F-T=M\alpha_{cm} \rightarrow a_{cm}=\frac{F-T}{M}=\frac{50-10}{10}m/s^2=4m/s^2$$

Έτσι το κέντρο του τροχού στο χρονικό διάστημα των 2s μετατοπίζεται κατά:

$$x_{cm}=½\,\alpha_{cm}t^2=½\,4\cdot 2^2m=8m \rightarrow$$

$$W_F=F\cdot x=50\cdot 8J=400J.$$

iv) Από την εξίσωση (4) παίρνουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\alpha_{cm}-\alpha=2m/s^2$. Αλλά τότε τη στιγμή $t_1=2s$ ο τροχός έχει ταχύτητα κέντρου μάζας $\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}\cdot t=4\cdot 2\ m/s=8m/s$ και γωνιακή ταχύτητα $\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t$.

Έτσι ο κύλινδρος έχει κινητική ενέργεια:

$$K=½\,M\upsilon_{cm}^2+½\,I\omega^2=½\,M\upsilon_{cm}^2+½\,½\,MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}^2\cdot t^2=½\,10\cdot 8^2J+¼\,10\cdot 2^2\cdot 2^2J=320J+40J=360J.$$

Αντίστοιχα η ταχύτητα της σανίδας είναι $\upsilon=at=2\cdot 2m/s=4m/s$, συνεπώς η κινητική της ενέργεια είναι:

$$K_\sigma=½\,m\upsilon^2=½\,5\cdot 4^2J=40J.$$

v) Για να πετύχουμε την μεγαλύτερη δυνατή μετατόπιση του κέντρου του τροχού θα αυξήσουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F, αλλά υπάρχει ένας περιορισμός. Όταν αυξάνουμε την δύναμη αυξάνεται και η τριβή. Αλλά η μέγιστη δυνατή τιμή της τριβής είναι η οριακή τριβή $T_{o\rho}=\mu_s N=\mu_s\cdot Mg=20N$.

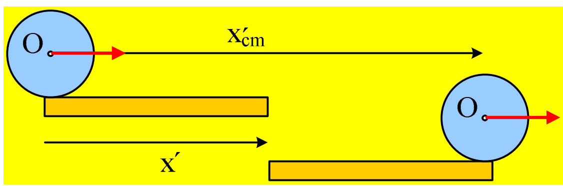
Αλλά τότε από την (3) παίρνουμε για την σανίδα $a'=\frac{T_{o\rho}}{m}=\frac{20}{5}m/s^2=4m/s^2$, ενώ η εξίσωση (2) μας δίνει $2T= MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow Ra'_{\gamma\omega\nu}=\frac{2T}{M}=\frac{2\cdot 20}{10}m/s^2=4m/s^2$, οπότε από την (4) παίρνουμε:

$\alpha=\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \rightarrow \alpha'_{cm}=\alpha'+\alpha'_{\gamma\omega\nu}\cdot R=8m/s^2$, συνεπώς από την (1) θα έχουμε:

$$F_{max}=T+M\alpha_{cm}=20N+10\cdot 8N=100N.$$

Στην περίπτωση αυτή το κέντρο του τροχού θα μετακινηθεί κατά:

$$x'_{cm}=½\,\alpha'_{cm}\cdot t^2=½\cdot 8\cdot 2^2m=16m.$$




Η σανίδα εξάλλου θα έχει μετατοπισθεί κατά:

$$x'=½\,\alpha' t^2=½\,4\cdot 2^2m=8m.$$

Αλλά το ελάχιστο δυνατό μήκος της σανίδας θα είναι αυτό, που ο τροχός θα ξεκινά από το ένα της άκρο και στο χρονικό διάστημα της επιτάχυνσης θα φτάνει στο άλλο της άκρο, όπως στο σχήμα.

Άρα $\ell_{min} = x_{cm}' - x' = 16m - 8m = 8m$ .

dmargaris@sch.gr