Δυναμική ενέργεια στο βαρυτικό πεδίο. Θετική ή αρνητική;

Γράφει το σχολικό βιβλίο:

Το πεδίο βαρύτητας, όπως και το ηλεκτροστατικό πεδίο, **είναι διατηρητικό.** Επομένως για την περιγραφή του είναι χρήσιμο το μέγεθος δυναμικό που ορίζεται με τρόπο ανάλογο. Συγκεκριμένα:

Δυναμικό (V) του πεδίου βαρύτητας, σε ένα του σημείο Α, ονομάζεται το σταθερό πηλίκο του έργου της δύναμης του πεδίου, όταν μεταφέρεται μάζα m από το σημείο Α στο άπειρο, προς τη μάζα αυτή.

$$V_A = \frac{W_{A\to\infty}}{m}$$

Μια πρώτη ένσταση θα μπορούσε να διατυπωθεί, για την απουσία της δυναμικής ενέργειας από τον παραπάνω ορισμό. Γιατί να μην ορισθεί το δυναμικό μέσω του πηλίκου:

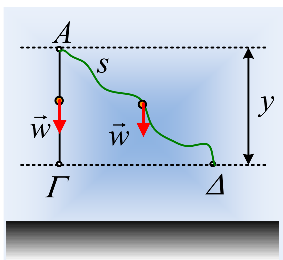
$$V_A = \frac{U_A}{m}$$

όπου U_A η δυναμική ενέργεια μιας μάζας m στη θέση Α;

- Τι ακριβώς σημαίνει ότι «είναι χρήσιμο το μέγεθος..»; Πού μας χρειάζεται;
- Γιατί να χρησιμοποιούμε το έργο από το Α στο άπειρο;
- Τελικά υπάρχει κάποια σχέση των παραπάνω, με όσα έχουν διδαχθεί στην Α΄ Λυκείου για δυναμική ενέργεια ή πρόκειται για διαφορετικά πράγματα;

Ας ξεκινήσουμε με όσα διδάσκουμε στην Α΄ Λυκείου.

Παράδειγμα 1^o:



Ένα σώμα μεταφέρεται από το σημείο Α, στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από τα σημεία Γ και Δ.

i) κινούμενο κατακόρυφα Α→Γ.

ii) κινούμενο κατά μήκος της καμπύλης AsΔ.

Πόσο είναι το έργο του βάρους για τις δύο διαδρομές;

Απάντηση:

Το έργο και στις δύο διαδρομές είναι το ίδιο (αφήνουμε την ακριβή μαθηματική απόδειξη, η οποία δεν εντάσσεται στο στόχο μας…) και ίσο με:

$$W_{A\Gamma}=W_{A\Delta}=w\cdot(A\Gamma)=mg\cdot y$$

Όπου y η κατακόρυφη απόσταση της αρχικής θέσης Α από τις τελικές θέσεις (Γ ή Δ).

Η παραπάνω ιδιότητα του βάρους , μας επιτρέπει να ορίσουμε τις συντηρητικές (διατηρητικές) δυνάμεις, ως εκείνες τις δυνάμεις, που το έργο τους δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, αλλά μόνο από την αρχική και τελική θέση.

Αλλά το γεγονός αυτό μας οδηγεί στη σκέψη, ότι μπορούμε να αποδώσουμε κάποια ποσότητα ορισμένης τιμής στο Α και άλλης τιμής στο Γ, όπου το έργο Α→Γ να είναι ίσο με τη διαφορά $Π_Α$-$Π_Γ$. Αλλά αν θέλουμε αυτή η διαφορά να είναι ίση με το έργο, θα πρέπει η ποσότητα Π να έχει διαστάσεις έργου (ισοδύναμα ενέργειας), οπότε οδηγούμαστε στο να **αποδώσουμε Δυναμική ενέργεια** στο σώμα στις θέσεις Α… Γ.

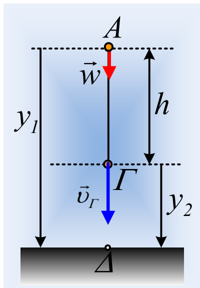
Πόση είναι η δυναμική ενέργεια στη θέση Α; Δεν ξέρουμε, ούτε έχει κάποια αξία να ξέρουμε την τιμή της. Αυτό που έχει σημασία, είναι η διαφορά $U_Α$-$U_Γ$, αφού αυτή είναι ίση με το $W_{Α\toΓ}$.

Έτσι η μαθηματική εξίσωση που έχει αξία και ουσιαστικό περιεχόμενο, είναι αυτή που μας επιτρέπει να υπολογίζουμε το έργο του βάρους:

$$\boxed{W_{A\to\Gamma} = U_A - U_\Gamma} \quad (1)$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 2^ο:



Ένα σώμα μάζας 1kg αφήνεται να πέσει ελεύθερα από το σημείο Α και μετά από λίγο περνά από τη θέση Γ, του σχήματος. Θέλουμε την ταχύτητα του σώματος στη θέση Γ. Δίνονται y_1=8m και y_2=3m, ενώ g=10m/s^2 και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Ο μαθητής Χ αποδίδει δυναμική ενέργεια στο σώμα 60J, στη θέση Α, ενώ ο μαθητής Υ υποστηρίζει ότι $U_Α$=100J.

Με βάση αυτές τις υποθέσεις, ποια ταχύτητα υπολογίζουν για τη θέση Γ και ποια η δυναμική ενέργεια του σώματος στη θέση Γ;

Απάντηση:

Το σώμα μετατοπίζεται κατά Δy=y_1-y_2=h με αποτέλεσμα το βάρος να παράγει έργο $W_{ΑΓ}$=w·h=mgh, οπότε με εφαρμογή του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα, παίρνουμε:

$$K_\Gamma - K_A = W_{A\to\Gamma} \to \frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 - 0 = mgh \to$$

$$\upsilon = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 5}\,m/s = 10m/s$$

- Ο μαθητής Χ, από την (1) υπολογίζει

  $$W_{A\to\Gamma} = U_A - U_\Gamma \to U_\Gamma = U_A - W_{A\to\Gamma} = U_A - mgh = 10J \text{ και}$$

  Υποστηρίζει ότι:

  Το σώμα στη θέση Α έχει ενέργεια (δυναμική) 60J, ενώ φτάνοντας στο Γ έχει ενέργεια:

  $$K+U = \frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 + U_\Gamma = 50J + 10J = 60J$$

  Συνεπώς η (μηχανική) ενέργεια διατηρείται.

- Ο μαθητής Υ, από την (1) υπολογίζει

$$W_{A\to\Gamma} = U_A - U_\Gamma \to U_\Gamma = U_A - W_{A\to\Gamma} = U_A - mgh = 50J \text{ και}$$

Υποστηρίζει ότι:

Το σώμα στη θέση Α έχει ενέργεια (δυναμική) 100J, ενώ φτάνοντας στο Γ έχει ενέργεια:

$$K+U=\frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 + U_\Gamma = 50J + 50J = 100J$$

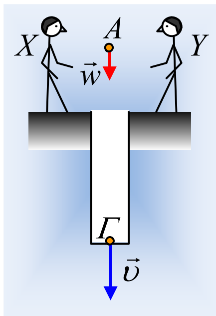
Συνεπώς η (μηχανική) ενέργεια διατηρείται.

Συμπέρασμα:

Δεν έχει καμιά αξία η δυναμική ενέργεια που θα αποδώσει κάθε μαθητής στο σώμα, σε μια θέση. Αυτό που έχει αξία, είναι το έργο του βάρους, κατά συνέπεια η μεταβολή στη δυναμική ενέργεια.

Αυτό μας επιτρέπει να ορίζουμε αυθαίρετα σε ποια θέση θα θεωρήσουμε ότι U=0!

Παράδειγμα 3ο:



Μια πέτρα μάζας 1kg αφήνεται να πέσει από ύψος h=1,25m από την επιφάνεια της Γης. Φτάνοντας στο έδαφος συναντά ένα πηγάδι βάθους 3,75m. Με ποια ταχύτητα φτάνει στον πυθμένα του;

Την απάντηση θα δώσουν δυο μαθητές. Ο Χ θεωρεί ότι η πέτρα στο έδαφος έχει U=0, ενώ ο Υ θεωρεί ότι U=0, στον πυθμένα του πηγαδιού.

Οι μαθητές αρχικά εφαρμόζουν το ΘΜΚΕ, αλλά τελικά κάνουν και έναν ενεργειακό έλεγχο.

Απάντηση:

Με εφαρμογή του ΘΜΚΕ μεταξύ των Α και Γ, βρίσκουν:

$$K_\Gamma\text{-}K_A=W_{A\to\Gamma} \to \frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 - 0 = mgh \to$$

$$\upsilon = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot (1{,}25+3{,}75)}m/s = 10m/s$$

Ο Χ λέει:

Στη θέση Α η πέτρα έχει δυναμική ενέργεια U_A=mgh=12,5J, ενώ στη θέση Γ θα πρέπει να έχει ίση ενέργεια, οπότε $K_\Gamma+U_\Gamma$=12,5J → U_Γ=12,5J- ½ mυ^2=-37,5J.

Ο Υ λέει:

Στη θέση Α η πέτρα έχει δυναμική ενέργεια U_A=mgh=1·10·(1,25+3,75)J=50J, ενώ στη θέση Γ θα πρέπει να έχει ίση ενέργεια. Ας την υπολογίσουμε: $K_\Gamma+U_\Gamma$= ½ mυ^2+0 = 50J.

Πόση είναι τελικά η δυναμική ενέργεια στον πυθμένα του πηγαδιού; Θετική ή αρνητική;

Ο Χ βρίσκει ότι U=-37,5J ενώ ο Υ είχε (αυθαίρετα ορίσει) ότι U=0.

Τι σημαίνει αρνητική δυναμική ενέργεια για τον Χ; Σημαίνει δυναμική ενέργεια 37,5J λιγότερη από όσο έχει στο Α (όπου επίσης αυθαίρετα πήρε ότι U=0). Ισοδύναμα σημαίνει ότι πρέπει να ασκηθεί κάποια εξωτερική δύναμη στην πέτρα για να την μεταφέρει από τον πυθμένα στην επιφάνεια του εδάφους και μέσω αυτής της δύναμης, θα πρέπει να δοθεί ενέργεια 37,5J στην πέτρα, για να αποκτήσει δυναμική ενέργεια μηδενική. Είναι σαν να χρωστάει κάποιος 37,5€, οπότε πρέπει να του δώσει κάποιος 37,5J για να ξεχρεώσει…

Βέβαια και στην περίπτωση αυτή, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα δυναμικό.

Για τον Χ, η πέτρα ξεκινά να κινείται από τη θέση Α, όπου $V_A = \frac{U_A}{m} = +12,5J/kg$ και φτάνει στη θέση Γ όπου V_Γ=-37,5J/kg!

Για τον Υ, η πέτρα ξεκινά από το Α, όπου V_A=50J/kg και φτάνει στο Γ, όπου V_Γ=0.

Ας έρθουμε τώρα στο βαρυτικό πεδίο της Β΄ τάξης. Έχουμε κάτι διαφορετικό;

Όχι η κατάσταση είναι ακριβώς η ίδια. Οι ίδιες ιδέες, οι ίδιοι ορισμοί.

Το μόνο που αλλάζει είναι ο υπολογισμός του έργου του βάρους που παράγεται.

Παράδειγμα 4^o:

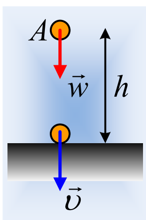
Ας πάρουμε την περίπτωση όπου ένα σώμα 1kg αφήνεται να κινηθεί από ύψος h από την επιφάνεια της Γης και ζητάμε την ταχύτητα με την οποία φτάνει στο έδαφος, σε δυο περιπτώσεις.

α) Αν h=5m και

β) αν h=R_Γ, όπου R_Γ η ακτίνα της Γης.

Δίνονται g_0=10m/s^2, R_Γ=6.400km, ενώ $W_{\infty \to r} = G\frac{M_\Gamma m}{r}$ όπου $W_{\infty \to r}$ το έργο του βάρους κατά τη μετακίνηση του σώματος από πολύ μεγάλη απόσταση (από το άπειρο) σε απόσταση r από το κέντρο της γης. Υποθέτουμε ότι δεν έχουμε ατμόσφαιρα και αντίσταση από τον αέρα.

Απάντηση:



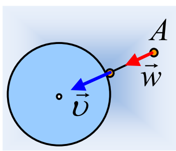
α) Αν θελήσουμε να κάνουμε σχήμα, θα έχουμε την εικόνα του διπλανού σχήματος και δουλεύοντας όπως στην Α΄τάξη, θα ορίσουμε U=0 στο έδαφος και θα έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}\text{-}K_{\alpha\rho\chi}=W_w \to ½\ m\upsilon^2=mgh \to$$

$$\upsilon = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 5}m/s = 10m/s$$

Και μιλώντας για ενέργειες, θα ερμηνεύαμε λέγοντας ότι αρχικά το σώμα είχε δυναμική ενέργεια U_A= mgh=50J, η οποία μετατρέπεται σε κινητική τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος:

$$(K= ½\ m\upsilon^2 =50J).$$



β) Τώρα αν θελήσουμε να κάνουμε σχήμα, θα σχεδιάζαμε το δεύτερο σχήμα. Παίρνοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος από τη θέση Α μέχρι την επιφάνεια της Γης, έχουμε:

$$K_{τελ}\text{-}K_{αρχ}=W_w \rightarrow ½\ mυ^2\text{=}0\text{=}\ W_w \quad (2)$$

Ναι, αλλά το βάρος δεν είναι σταθερή δύναμη, οπότε το έργο του βάρους δεν μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση W=mgh! Εδώ χρειάζονται τα μαθηματικά και ο υπολογισμός ενός ολοκληρώματος…

Ας παρακάμψουμε το πρόβλημα υπολογίζοντας το έργο από τα δεδομένα μας. Αν Γ ένα σημείο στην επιφάνεια της Γης έχουμε:

$$W_{\infty\to Γ} = W_{\infty\to A} + W_{A\to Γ} \rightarrow W_{A\to Γ} = W_{\infty\to Γ} - W_{\infty\to A} \rightarrow$$

$$W_{A\to Γ} = G\frac{M_Γ m}{r_Γ} - G\frac{M_Γ m}{r_A} = G\frac{M_Γ m}{R_Γ} - G\frac{M_Γ m}{2R_Γ} = G\frac{M_Γ m}{2R_Γ} \quad (3)$$

Αλλά στην επιφάνεια της Γης, για την επιτάχυνση της βαρύτητας ισχύει:

$$g_0 = G\frac{M_Γ}{R_Γ^2} \rightarrow GM_Γ = g_0 R_Γ^2$$

Και η (3) γίνεται:

$$W_{A\to Γ} = G\frac{M_Γ m}{2R_Γ} = \frac{mg_0 R_Γ^2}{2R_Γ} = \frac{1}{2} mg_0 R_Γ \quad (4)$$

Επιστρέφοντας στην σχέση (2) παίρνουμε:

$$υ = \sqrt{\frac{2W_{A\to Γ}}{m}} = \sqrt{\frac{mg_0 R_Γ}{m}} = \sqrt{6.400\cdot 10^3}\, m/s = 8.000 m/s.$$

Και το ερώτημα που τίθεται τώρα, είναι πόση ενέργεια έχει το σώμα στη θέση Α και πόση στη θέση Γ, στην επιφάνεια της Γης;

- Αν θεωρήσουμε ότι $U_Γ$=0, τότε U_A-$U_Γ$=$W_{A\to Γ}$ ή U_A=$W_{A\to Γ}$=$\frac{1}{2}mg_0R_Γ$ =32·10^6J, ενώ K_A=0. Το σώμα φτάνοντας στην επιφάνεια της Γης θα έχει μόνο κινητική ενέργεια $K_Γ$= ½ m$υ^2$=32·10^6J. Η μηχανική ενέργεια διατηρείται.
- Αν θεωρήσουμε ότι U_∞=0, τότε U_∞-U_A=$W_{\infty\to A}$ →

  $$U_A = -W_{\infty\to A} = -G\frac{M_Γ m}{2R_Γ} = -\frac{mg_0 R_Γ^2}{2R_Γ} = -\frac{1}{2} mg_0 R_Γ \text{ ή}$$

  $$U_A = -32\cdot 10^6 J = E_{μηχ/A}.$$

  Το σώμα φτάνοντας στην επιφάνεια της Γης έχει ομοίως δυναμική ενέργεια:

  $$U_Γ = -W_{\infty\to Γ} = -G\frac{M_Γ m}{R_Γ} = -\frac{mg_0 R_Γ^2}{R_Γ} = -mg_0 R_Γ,$$ συνεπώς μηχανική ενέργεια:

  $$K_Γ + U_Γ = \frac{1}{2} mυ^2 - mg_0 R_Γ = 32\cdot 10^6 J - 64\cdot 10^6 J = -32\cdot 10^6 J.$$

Συμπέρασμα: μπορούμε ξανά να ορίσουμε U=0 σε οποιοδήποτε σημείο επιθυμούμε, χωρίς αυτό να αλλάζει καθόλου την επίλυση ενός προβλήματος. Το ποιο σημείο επιλέγουμε, εξαρτάται από το πρόβλημα και από τι μας «συμφέρει» με την έννοια να έχουμε λιγότερες πράξεις…

Ερώτηση:

Και τελικά γιατί βάζουμε, σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο, $V_\infty=0$ και $U_\infty=0$;

Αυτό είναι η μισή αλήθεια…

- Είναι κατ' αρχήν μια «λογική» επιλογή. Στο άπειρο δεν υπάρχει αλληλεπίδραση, οπότε γιατί να αποδώσουμε δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης; Το πιο λογικό είναι να θεωρήσουμε ότι όταν $r\to\infty$, τότε $U\to 0$.
- Αν μας ενδιαφέρουν προβλήματα ουράνιας μηχανικής και αλληλεπίδρασης μεταξύ ουρανίων σωμάτων, γιατί να προτιμήσουμε κάτι άλλο, παρά να θεωρήσουμε ότι σε μακρινές αποστάσεις η δυναμική ενέργεια είναι μηδενική;
- Αλλά και σε προβλήματα με τη Γη, αν η κίνηση γίνεται σε μεγάλα ύψη (δορυφόροι ή ταχύτητες διαφυγής), «βολεύει» να μηδενίζουμε την δυναμική ενέργεια στο άπειρο..

Παρόλα αυτά, κανείς δεν μας απαγορεύει να δουλέψουμε με άλλο σημείο αναφοράς, δηλαδή σημείο για το οποίο V=0 ή ισοδύναμα που η δυναμική ενέργεια ενός σώματος να είναι μηδενική. Ας το δούμε:

Παράδειγμα 5ο:

Αναφερόμενοι στο σημείο Α του προηγούμενου παραδείγματος, το οποίο απέχει κατά $h=R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης, πόσο είναι το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης στο σημείο Α; Ισχύουν τα παραπάνω δεδομένα.

Απάντηση:

Το ερώτημα **δεν** έχει απάντηση, αφού δεν προσδιορίστηκε σε ποιο σημείο θα έχουμε V=0. Έτσι:

i) Αν $V_\infty=0$, τότε:

$$V_A=\frac{W_{A\to\infty}}{m}=\frac{-W_{\infty\to A}}{m}=\frac{-G\dfrac{M_\Gamma}{r}}{m}=-G\frac{M_\Gamma}{r}\to$$

$$V_A=-G\frac{M_\Gamma}{r}=-\frac{g_0R_\Gamma^2}{2R_\Gamma}=-\frac{1}{2}g_0R_\Gamma=-32\cdot 10^6\,J/kg$$

ii) Αν πάρουμε το δυναμικό μηδέν στην επιφάνεια της Γης ($V_\Gamma=0$):

$$V_A=\frac{W_{A\to\Gamma}}{m}$$

Αλλά με βάση την σχέση (4) $W_{A\to\Gamma}=G\dfrac{M_\Gamma m}{2R_\Gamma}=\dfrac{mg_0R_\Gamma^2}{2R_\Gamma}=\dfrac{1}{2}mg_0R_\Gamma$ οπότε:

$$V_A = \frac{W_{A\to\Gamma}}{m} = \frac{\frac{1}{2}mg_0R_\Gamma}{m} = \frac{1}{2}g_0R_\Gamma = 32\cdot 10^6\ J/kg$$

iii) Θα μπορούσαμε βέβαια να πάρουμε και $V_A=0$ εξ υποθέσεως! Κανείς δεν μας το απαγορεύει…

Βέβαια στην περίπτωση αυτή θα είχαμε άλλη τιμή δυναμικού, για παράδειγμα, στην επιφάνεια της Γης. Πράγματι τότε:

$$V_\Gamma = \frac{W_{\Gamma\to A}}{m} = \frac{-W_{A\to\Gamma}}{m} = \frac{-\frac{1}{2}mg_0R_\Gamma}{m} = -\frac{1}{2}g_0R_\Gamma = -32\cdot 10^6\ J/kg$$

dmargaris@gmail.com