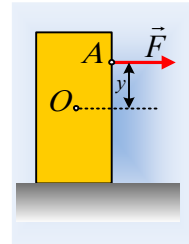


### Διερευνώντας την ανατροπή και την ολίσθηση.

Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας «όρθιος» ομογενής κύλινδρος, μάζας  $M=60\text{kg}$ , ακτίνας  $R$  και ύψους  $4R$ . Ασκούμε στο σημείο  $A$ , το οποίο απέχει κατακόρυφη απόσταση  $y=R$  από το κέντρο μάζας  $O$ , μια οριζόντια δύναμη  $F$ , όπως στο σχήμα (η προβολή του κυλίνδρου στο επίπεδο κίνησής του).



- i) Ποιο το ελάχιστο μέτρο της δύναμης  $F$  για να ανατραπεί ο κύλινδρος, αν ο συντελεστής τριβής είναι αρκετά μεγάλος, ώστε να μην προηγηθεί ολίσθηση του κυλίνδρου;
- ii) Στο σημείο  $A$  ασκούμε μεταβλητή οριζόντια δύναμη που το μέτρο της μεταβάλλεται με το χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση  $F=4t$  (S.I.). Αν οι συντελεστές τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου έχουν τιμές  $\mu=\mu_s=0,3$  ο κύλινδρος πρώτα θα ανατραπεί ή θα ολισθήσει;
- iii) Ποια χρονική στιγμή θα ανατραπεί ο κύλινδρος;
- iv) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη στιγμή που αρχίζει να ανατρέπεται. Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

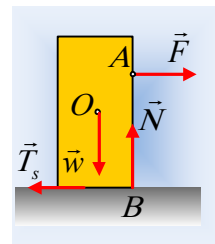
#### Απάντηση:

- i) Έστω ότι στο  $A$  ασκούμε μια μικρού μέτρου δύναμη  $F$ , χωρίς να προκληθεί ούτε ολίσθηση ούτε ανατροπή του κυλίνδρου, έχουμε δηλαδή ισορροπία.

$$\Sigma F=0 \rightarrow N=Mg \text{ και } T_s=F.$$

$$\Sigma \tau_o=0 \text{ ή } -F \cdot R - T_s \cdot 2R + N \cdot x=0 \rightarrow$$

$$x = \frac{3F}{Mg} R \quad (1)$$

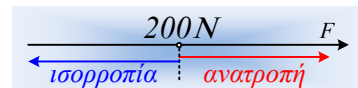


Από την σχέση αυτή βλέπουμε ότι αν μεγαλώσει το μέτρο της ασκούμενης δύναμης  $F$ , θα αυξηθεί και ο μοχλοβραχίονας της κάθετης αντίδρασης (δύναμης στήριξης) του επιπέδου. Με άλλα λόγια ο φορέας της  $N$  απομακρύνεται από το κέντρο μάζας  $O$  του κυλίνδρου. Αλλά τότε η μέγιστη δύναμη που μπορεί να ασκηθεί χωρίς να ανατραπεί ο κύλινδρος, θα είναι αυτή για την οποία θα έχουμε τη μέγιστη δυνατή τιμή του  $x$ , που δεν είναι άλλη από την ακτίνα  $R$  του κυλίνδρου, οπότε από την (1) βρίσκουμε:

$$x = \frac{3F}{Mg} R \rightarrow F_{max} = \frac{Mgx_{max}}{3R} = \frac{MgR}{3R} = \frac{1}{3} Mg = 200\text{N}$$

Οπότε για τιμές δύναμης πάνω από  $200\text{N}$  ο κύλινδρος ανατρέπεται ή ισοδύναμα το ελάχιστο στο μέτρο της δύναμης που πρέπει να ασκηθεί για να ανατραπεί ο κύλινδρος είναι οριακά τα  $200\text{N}$ .

Τι σημαίνει η παραπάνω φράση; Ας δούμε το διπλανό διάγραμμα. Για τιμές της δύναμης κάτω από τα  $200\text{N}$  ο κύλινδρος ισορ-



ροπεί. Για τιμές μεγαλύτερες από 200N, ανατρέπεται...

- ii) Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα για να ανατραπεί ο κύλινδρος, πριν αρχίσει να ολισθαίνει, θα πρέπει να δεχτεί δύναμη μέτρου  $F=200N$ . Αλλά αφού  $F=4t$  έχουμε:

$$4t=200 \rightarrow t_1=50s.$$

Εξάλλου ο κύλινδρος θα αρχίσει να ολισθαίνει όταν η στατική τριβή πάρει τη μέγιστη δυνατή τιμή της, ίση με την οριακή τριβή:

$$T_{op}=\mu_s N=\mu_s \cdot Mg=0,3 \cdot 60 \cdot 10N=180N$$

Αλλά μέχρι τη στιγμή που η τριβή γίνεται 180N, ο κύλινδρος ισορροπεί οπότε:

$$\Sigma F_x=0 \text{ ή } F=T_s \rightarrow$$

$$4t=180 \rightarrow t_2=45s.$$

Συμπέρασμα: Αν ασκήσουμε τη μεταβλητή δύναμη  $F$ , πρώτα θα έχουμε ολίσθηση και μετά ανατροπή του κυλίνδρου.

- iii) Ο κύλινδρος αρχίζει να επιταχύνεται προς τα δεξιά ολισθαίνοντας τη χρονική στιγμή  $t_2=45s$ . Έστω τη στιγμή  $t_3$  αρχίζει και να ανατρέπεται. Τότε η ανατροπή θα γίνει γύρω από το σημείο B, σημείο στο οποίο ασκείται και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου. Αλλά «ανατροπή» σημαίνει ότι ο κύλινδρος αποκτά γωνιακή επιτάχυνση, οπότε εφαρμόζοντας το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα ως προς οριζόντιο άξονα που περνά από το κ.μ. Ο παίρνουμε:

$$\Sigma \tau_o = I \cdot \alpha_{γων} \rightarrow F \cdot R + T_{ολ} \cdot 2R - N \cdot R = m \cdot \alpha_{γων}$$

Όπου έχουμε πάρει ως θετικές τις δεξιόστροφες ροπές, μιας και η ανατροπή θα είναι δεξιόστροφη, οπότε θα έχουμε και  $\alpha_{γων} > 0$ . Έτσι παίρνουμε:

$$F \cdot R + T_{ολ} \cdot 2R - N \cdot R > 0 \text{ ή } F > N - 2T_{ολ} \text{ ή } F > Mg - 2T_{ολ} \text{ ή}$$

$$F > 600N - 2 \cdot 180N \rightarrow F > 240N$$

Ο κύλινδρος δηλαδή αρχίζει να ανατρέπεται (οριακά) όταν το μέτρο της ασκούμενης δύναμης γίνει 240N, οπότε:

$$4t=240 \rightarrow t_3=60s.$$

Αξίζει να επισημανθεί, αλλά και να σχολιασθεί η διαφορετική τιμή για τις χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_3$ ... Και οι δυο αναφέρονται στην ανατροπή, αλλά η πρώτη στην περίπτωση της ισορροπίας του κυλίνδρου, ενώ η δεύτερη στην περίπτωση της επιτάχυνσής του. Και οι δύο αυτές καταστάσεις δεν είναι ισοδύναμες!

- iv) Στο χρονικό διάστημα  $45s < t \leq 60s$  ο κύλινδρος επιταχύνεται μεταφορικά προς τα δεξιά με επιτάχυνση που βρίσκεται με εφαρμογή του 2<sup>ου</sup> νόμου:

$$\Sigma F_x = M \cdot \alpha_{cm} \rightarrow$$

$$F - T_{ολ} = M \cdot \alpha_{cm} \rightarrow$$

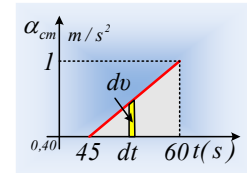
$$\alpha_{cm} = \frac{F - T_{ολ}}{M} = \frac{4t - 180}{60} = \frac{1}{15}t - 3 \quad (\text{S.I.})$$

Κάνουμε το διάγραμμα  $a_{cm}-t$ , όπως στο διπλανό σχήμα, οπότε το εμβαδόν του γκρι τριγώνου, είναι αριθμητικά ίση με την μεταβολή της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου:

$$\Delta v = \frac{1}{2} 15 \cdot 1m/s = 7,5m/s$$

Αλλά  $v_0=0$ , οπότε η ταχύτητα του κυλίνδρου όταν αρχίσει η ανατροπή του έχει μέτρο 7,5m/s. Κατά συνέπεια:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 60 \cdot 7,5^2 J = 1.687,5 J$$



[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)