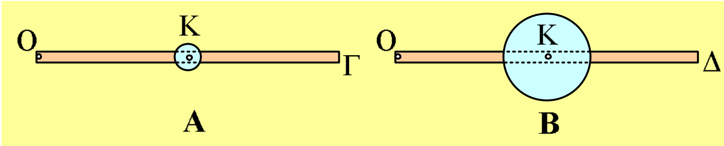
Το υλικό σημείο και η σφαίρα.

ΘΕΜΑ 2ο.



Μια ομογενής λεπτή ράβδος μήκους ℓ και μάζας Μ, μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Ο. Στο μέσον Κ της ράβδου έχει προσδεθεί μια σφαίρα ίσης μάζας Μ (έχουμε τρυπήσει τη σφαίρα κατά μήκος μιας διαμέτρου στην οποία εισχωρήσαμε τη ράβδο), δημιουργώντας έτσι ένα νέο στερεό. Στο πρώτο σχήμα η ακτίνα της σφαίρας είναι μικρή (στερεό Α), οπότε την θεωρούμε αμελητέα, ενώ στο δεύτερο σχήμα (στερεό Β) η σφαίρα έχει ακτίνα R. Τα δύο στερεά συγκρατούνται σε θέση τέτοια, ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια και σε μια στιγμή αφήνονται να κινηθούν.

Οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες; Να δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

i) Μεγαλύτερη αρχική γωνιακή επιτάχυνση θα αποκτήσει το στερεό Α.

ii) Μεγαλύτερη ταχύτητα κατά την κίνηση των στερεών θα αποκτήσει το σημείο Γ.

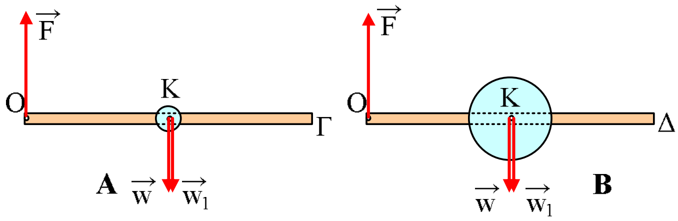
iii) Ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μεγαλύτερος για το Α στερεό.

iv) Η σφαίρα με τη μεγαλύτερη ακτίνα θα αποκτήσει και μεγαλύτερη μέγιστη κινητική ενέργεια.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_1 = 1/3\ M\ell^2$ και η ροπή αδράνειας μιας σφαίρας ως της άξονα που συμπίπτει με μια διάμετρό της $I_2 = 2/5\ MR^2$.

Απάντηση:

i) Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα δύο στερεά.



Παίρνοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση του στερεού γύρω από το άκρο Ο έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } 2Mg = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2Mg}{I} \quad (1)$$

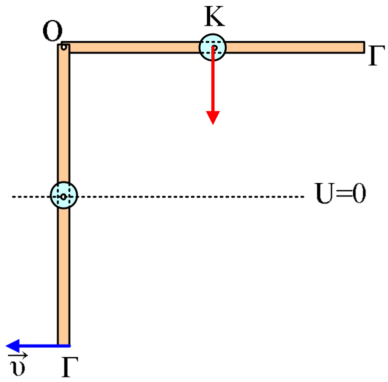
Αλλά για τις ροπές αδράνειας έχουμε:

$$I_A = I_\rho + I_\sigma = \frac{1}{3}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}M\ell^2. \quad (2)$$

$$I_B = I_\rho + I_\sigma = \frac{1}{3}M\ell^2 + \left(\frac{2}{5}MR^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right) = \frac{7}{12}M\ell^2 + \frac{2}{5}MR^2 \quad (3)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι μεγαλύτερη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής έχει το Β στερεό συνεπώς με βάση την σχέση (1) θα αποκτήσει μικρότερη αρχική γωνιακή επιτάχυνση. Η πρόταση είναι σωστή.

ii) Τα στερεά επιταχύνονται μέχρι που η ράβδος να γίνει κατακόρυφη, οπότε αποκτούν και τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα. Η μηχανική ενέργεια ανάμεσα στην αρχική θέση και στη θέση που η ράβδος είναι κατακόρυφη, παραμένει σταθερή, αφού η μόνες δυνάμεις που παράγουν έργο είναι τα βάρη, που είναι συντηρητικές δυνάμεις, οπότε έχουμε:



$$K_{αρχ}+U_{αρχ}= K_{τελ}+U_{τελ} \text{ ή}$$

$$2Mgh = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \text{ ή}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg\ell}{I}}$$

Τη μεγαλύτερη ταχύτητα την έχει το κατώτερο σημείο της ράβδου:

$$υ_{γραμ}= \omega \cdot \ell = \ell\sqrt{\frac{Mg\ell}{I}}$$

Όμως το στερεό Α έχει μικρότερη ροπή αδράνειας, συνεπώς το κάτω άκρο του Γ θα αποκτήσει και τη μεγαλύτερη ταχύτητα. Η πρόταση είναι σωστή.

iii) Μόλις τα στερεά αφεθούν να κινηθούν, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής είναι (θεωρούμε θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού):

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = 2Mg\cdot\frac{\ell}{2}$$

Συνεπώς οι δυο ρυθμοί είναι ίσοι. Η πρόταση είναι λανθασμένη.

iv) Η κινητική ενέργεια κάθε σφαίρας είναι μέγιστη στην κατώτερη θέση. Η κινητική αυτή ενέργεια για τη σφαίρα αμελητέας ακτίνας είναι:

$$K_1= \tfrac{1}{2} M υ_K^2 = \frac{1}{2}M\omega^2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}M\omega^2\ell^2 = \frac{1}{8}M\,\frac{Mg\ell}{\frac{7}{12}M\ell^2}\,\ell^2$$

$$K_1=\frac{3}{7}Mg\ell$$

Ενώ για την σφαίρα ακτίνας R είναι:

$$K_2= \tfrac{1}{2} M υ_K^2 + \tfrac{1}{2} I_σ\cdot\omega^2 = \frac{1}{2}M\omega^2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}MR^2\omega^2 = \frac{1}{8}M\omega^2\ell^2 + \frac{1}{5}M\omega^2R^2$$

$$K_2=\frac{1}{8}M\omega^2\ell^2 + \frac{1}{5}M\omega^2R^2 = M(\frac{1}{8}\ell^2 + \frac{1}{5}R^2)\frac{Mg\ell}{M(\frac{7}{12}\ell^2 + \frac{2}{5}R^2)}$$

$$K_2 = \frac{\frac{1}{8}\ell^2 + \frac{1}{5}R^2}{\frac{7}{12}\ell^2 + \frac{2}{5}R^2} Mg\ell$$

$$\text{Αλλά } \frac{\frac{1}{8}\ell^2 + \frac{1}{5}R^2}{\frac{7}{12}\ell^2 + \frac{2}{5}R^2} > \frac{3}{7}$$

Άρα η πρόταση είναι σωστή.

Σχόλιο:

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας θα μπορούσε να υπολογιστεί σαν μόνο περιστροφική κινητική γύρω από τον άξονα στο άκρο Ο:

$$K_2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right)\omega^2 = \frac{1}{8}M\omega^2\ell^2 + \frac{1}{5}M\omega^2 R^2$$

dmargaris@sch.gr