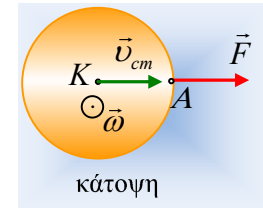


### Η κεντρομόλος επιτάχυνση σημείου.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται ένας λεπτός ομογενής κυκλικός δίσκος, μάζας  $m=4\text{kg}$  και ακτίνας  $R=0,2\text{m}$ , με το επίπεδό του οριζόντιο και με την επίδραση μιας οριζόντιας μεταβλητής δύναμης  $F$ , η οποία ασκείται στο σημείο  $A$  της περιφέρειας του δίσκου. Σε μια στιγμή  $t_1$ , το κέντρο μάζας του δίσκου έχει ταχύτητα  $v_{cm}=1\text{m/s}$  ενώ η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου έχει μέτρο  $\omega=5\text{rad/s}$  με κατεύθυνση όπως στο σχήμα. Τη στιγμή αυτή το μέτρο της δύναμης είναι  $F=4\text{N}$ , ενώ η κατεύθυνσή της είναι ίδια με την κατεύθυνση της ταχύτητας  $v_{cm}$ . Για την παραπάνω χρονική στιγμή  $t_1$ :



- i) Να υπολογισθούν η επιτάχυνση του κέντρου  $K$ , καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.
- ii) Θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του δίσκου, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας  $K$ , να βρεθούν η επιτόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου  $A$ , για την κυκλική κίνησή του γύρω από το  $K$ .
- iii) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σημείου  $A$ , στο οποίο ασκείται η δύναμη  $F$ .
- iv) Η παραπάνω θεώρηση, δεν είναι παρά ένας βολικός τρόπος μελέτης της κίνησης. Στην πραγματικότητα το σημείο  $A$  διαγράφει μια καμπύλη τροχιά. Αφού υπολογιστεί η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου  $A$ , για την καμπυλόγραμμη αυτή κίνηση, να υπολογίσετε την ακτίνα ενός κύκλου, ο οποίος μπορεί να προσεγγίσει την τροχιά αυτή (η ακτίνα αυτή ονομάζεται ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του σημείου  $A$ , στην θέση αυτή).

#### Απάντηση:

- i) Θεωρώντας την κίνηση του δίσκου σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο  $K$  του δίσκου, παίρνουμε με εφαρμογή του 2<sup>ου</sup> νόμου του Νεύτωνα:

$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma \vec{F} = m \vec{a}_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{F}{m} = \frac{4}{4} \text{ m/s}^2 = 1 \text{ m/s}^2, \text{ με κατεύθυνση αυτή}$$

της δύναμης (τη διεύθυνση  $x$ ).

$$\text{Στροφική κίνηση: } \Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 0.$$

- ii) Μελετάμε την κυκλική κίνηση του σημείου  $A$ , γύρω από το κέντρο  $K$  του δίσκου. Για την κίνηση αυτή το  $A$  έχει επιτόχια επιτάχυνση, λόγω γωνιακής επιτάχυνσης:

$$\alpha_{επ} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R = 0$$

αφού ο δίσκος δεν έχει τη στιγμή αυτή γωνιακή επιτάχυνση.

Έχει όμως κεντρομόλο επιτάχυνση, με κατεύθυνση προς το κέντρο  $K$ , με μέτρο:

$$a_K = \frac{v_{\gamma\omega}^2}{R} = \omega^2 R = 5^2 \cdot 0,2 \text{ m/s}^2 = 5 \text{ m/s}^2$$

- iii) Με βάση τα παραπάνω, το σημείο A του δίσκου έχει την επιτάχυνση  $\vec{a}_{cm}$  λόγω μεταφορικής κίνησης και την επιτάχυνση  $a_K$ , λόγω της κυκλικής του κίνησης γύρω από το κέντρο K. Αλλά τότε το σημείο A έχει επιτάχυνση στην διεύθυνση x, όπως στο σχήμα, με φορά προς τα αριστερά και μέτρο:

$$a_A = a_K - a_{cm} = (5-1)m/s^2 = 4 m/s^2.$$

- 2) Με βάση το διπλανό σχήμα, η ταχύτητα του σημείου A, το διανυσματικό άθροισμα της  $v_{cm}$  και της  $v_{\gamma\rho} = \omega R$ , έχει μέτρο:

$$v_A = \sqrt{v_{cm}^2 + (\omega R)^2} = \sqrt{1^2 + (5 \cdot 0,2)^2} m/s = \sqrt{2} m/s$$

Ενώ για την κατεύθυνσή της:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{v_y}{v_x} = 1$$

Δηλαδή η ταχύτητα του σημείου A σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  με την διεύθυνση της  $v_{cm}$ .

Ας αφήσουμε τώρα στην άκρη την παραπάνω θεώρηση και ας επικεντρωθούμε ξανά στο σημείο A. Τι ταχύτητα και τι επιτάχυνση έχει; Οι τιμές είναι αυτές που υπολογίσαμε παραπάνω.

Αν αναλύσουμε τώρα την επιτάχυνση σε δύο κάθετες διευθύνσεις, στους άξονες  $x'$  και  $y'$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα,

όπου ο άξονας  $x'$  έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας του σημείου A, οπότε  $\varphi = 45^\circ$ .

$$a_{a,x'} = a_A \cdot \eta\mu\varphi = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} m/s^2 = 2\sqrt{2} m/s^2 \text{ και}$$

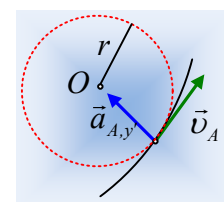
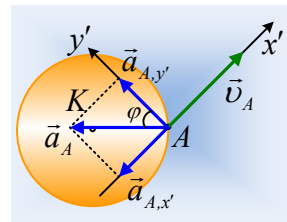
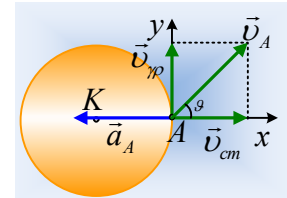
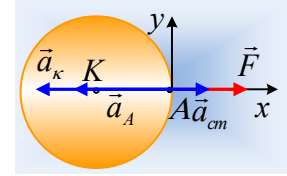
$$a_{a,y'} = a_A \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} m/s^2 = 2\sqrt{2} m/s^2$$

Η πρώτη από τις παραπάνω συνιστώσες μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας του σημείου A (στην περίπτωσή μας το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται κατά  $2\sqrt{2} m/s$ ), ενώ η δεύτερη μεταβάλλει την κατεύθυνση της ταχύτητας, είναι δηλαδή η λεγόμενη κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου A, στην καμπυλόγραμμη κίνηση που πραγματοποιεί.

Αλλά τότε:

$$a_{A,y'} = \frac{v_A^2}{r}$$

Όπου  $r$  η ακτίνα ενός κύκλου, ο οποίος μπορεί να προσεγγίσει τμήμα της τροχιάς τη στιγμή αυτή. Έτσι:



$$r = \frac{v_A^2}{a_{A,y'}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} m = \frac{\sqrt{2}}{2} m$$

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)