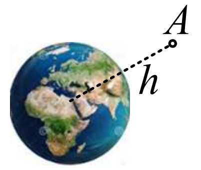
Η Γη, η Εξωγή και η Περαγή.

Στην επιφάνεια της Γης η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει τιμή $g_o=10m/s^2$.



i) Να βρεθεί η επιτάχυνση που θα αποκτήσει ένα σώμα, αν αφεθεί να κινηθεί σε ένα σημείο Α, σε ύψος h=R, από την επιφάνειά της, όπου R η ακτίνα της Γης.

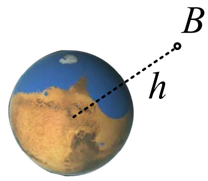
Σε ένα «κοντινό» μας ηλιακό σύστημα ανακαλύφτηκε ένας πλανήτης, η Εξωγή, ο οποίος έχει διπλάσια ακτίνα από την Γη. Μετά από μετρήσεις, διαπιστώθηκε ότι η Εξωγή έχει την ίδια ποιοτική και ποσοτική σύσταση με τον πλανήτη μας, συνεπώς και την ίδια (μέση) πυκνότητα με τη Γη.

Η Εξωγή

ii) Πόση είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Εξωγής;

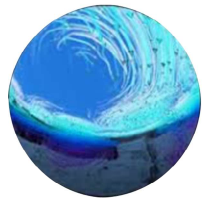
iii) Αν εξαιτίας «βαρυτικής κατάρρευσης» μειωθεί η ακτίνα της Εξωγής στο μισό, να υπολογιστούν:

α) Η επιτάχυνση της βαρύτητας στη νέα της επιφάνεια.

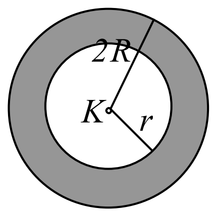


β) Σε ένα σημείο Β, το οποίο βρίσκεται σε ύψος h=R από την επιφάνειά της.

iv) Σε έναν άλλο γαλαξία, βρέθηκε ένας άλλος πλανήτης με τα ίδια χαρακτηριστικά με τη Γη και την Εξωγή, η Περαγή. Έχει διπλάσια ακτίνα από τη Γη, ενώ η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά της μετρήθηκε στην τιμή $g_\pi=10m/s^2$. Η μέτρηση έγινε σε διάφορα σημεία, από όπου εξήχθη το συμπέρασμα ότι η κατανομή της μάζας είναι ομοιόμορφη (λέμε ότι έχουμε σφαιρική συμμετρία…). Για να ερμηνευθεί η τιμή της επιτάχυνσης αυτής, προτάθηκε το μοντέλο του σφαιρικού φλοιού, δηλαδή ότι η Περαγή είναι κούφια, έχοντας κενή μια σφαιρική περιοχή ακτίνας r, με κέντρο το κέντρο της, όπως στο σχήμα.



Η Περαγή



Να υπολογιστεί το πάχος του σφαιρικού φλοιού.

Απάντηση:

i) Η επιτάχυνση της βαρύτητας (η επιτάχυνση που θα αποκτήσει ένα σώμα αν αφεθεί να κινηθεί στη θέση Α) δίνεται από την εξίσωση:

$$g_A = G\frac{M_\Gamma}{R_A^2} \quad (1)$$

Αντίστοιχα στην επιφάνεια της Γης ισχύει $g_o = G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}$. Με διαίρεση κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\frac{g_A}{g_o} = \frac{R_\Gamma^2}{R_A^2} = \frac{R_\Gamma^2}{4R_\Gamma^2} \rightarrow g_A = \frac{1}{4}g_0 = 2{,}5m/s^2.$$

ii) Οι δυο πυκνότητες είναι ίσες:

$$\rho = \frac{M_\Gamma}{V_\Gamma} = \frac{M_E}{V_E}$$

$$\frac{M_\Gamma}{\frac{4}{3}\pi R_\Gamma^3} = \frac{M_E}{\frac{4}{3}\pi R_E^3} \to M_E = M_\Gamma \left(\frac{R_E}{R_\Gamma}\right)^3 = M_\Gamma 2^3 = 8M_\Gamma \,.$$

Οπότε η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά της (έστω στο σημείο Β) έχει μέτρο:

$$g_B = G\frac{M_E}{R_E^2} = G\frac{8M_\Gamma}{4R_\Gamma^2} = 2g_o = 20m/s^2$$

iii) α) Αν καταρρεύσει η Εξωγή και αποκτήσει ακτίνα R΄=R_Γ, τότε η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά της θα έχει τιμή:

$$g'_E = G\frac{M_E}{R_E'^2} = G\frac{8M_\Gamma}{R_\Gamma^2} = 8g_o = 80m/s^2$$

β) Αν πάρουμε τώρα το ίδιο σημείο Β, σε απόσταση R=2R_Γ από το κέντρο της Εξωγής, η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο:

$$g'_B = G\frac{M_E}{R^2} = G\frac{8M_\Gamma}{4R_\Gamma^2} = 2g_o = 20m/s^2$$

Συμπέρασμα:

Η επιτάχυνση της βαρύτητας στο σημείο Β δεν εξαρτάται από το πόση είναι η ακτίνα του πλανήτη. Η εξίσωση $g = G\frac{M}{r^2}$ μας δείχνει ότι η τιμή σε ορισμένο σημείο, εξαρτάται από την απόσταση του σημείου από το κέντρο του πλανήτη, ως αν, όλη η μάζα ήταν συγκεντρωμένη σε ένα σημείο, στο κέντρο του πλανήτη.

iv) Με βάση το προηγούμενο συμπέρασμα, η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Περαγής, δίνεται από την εξίσωση:

$$g_\pi = G\frac{M_\pi}{R_\pi^2} = G\frac{M_\pi}{4R_\Gamma^2}$$

Με σύγκριση με την (1) (πρώτα μέλη ίσα) παίρνουμε:

$$G\frac{M_\pi}{4R_\Gamma^2} = G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \to M_\pi = 4M_\Gamma$$

Αλλά με βάση το ii) ερώτημα, αν ο πλανήτης ήταν συμπαγής θα είχε οκταπλάσια μάζα από τη Γη, συνεπώς «της λείπει» μάζα 4M_Γ εξαιτίας μιας κενής περιοχής που δεχόμαστε σφαιρική ακτίνας r. Έτσι για την μάζα που θα έπρεπε να έχει αυτή η σφαίρα, ώστε όλος ο πλανήτης να είχε μάζα 8M_Γ, έχουμε:

$$\rho = \frac{M_\Gamma}{V_\Gamma} = \frac{M_1}{V_1} \rightarrow \frac{M_\Gamma}{\frac{4}{3}\pi R_\Gamma^3} = \frac{4M_\Gamma}{\frac{4}{3}\pi r^3} \rightarrow$$

$$r = R_\Gamma \sqrt[3]{4}$$

Αλλά τότε το πάχος του σφαιρικού φλοιού (που τελικά είναι η Περαγή) ισχύει:

$$D = 2R_\Gamma - r = 2R_\Gamma - R_\Gamma \sqrt[3]{4} = R_\Gamma \left(2 - \sqrt[3]{4}\right) \approx 0{,}4R_\Gamma$$

dmargaris@gmail.com