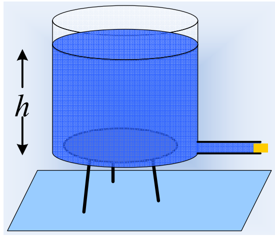
Πάμε να αυξήσουμε την παροχή

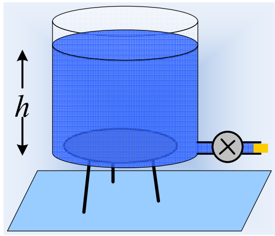


Ένα μεγάλο κυλινδρικό δοχείο περιέχει νερό σε βάθος h, ενώ κοντά στον πυθμένα του είναι συνδεδεμένος οριζόντιος σωλήνας διατομής $A=1cm^2$, ο οποίος κλείνεται με τάπα. Ανοίγοντας την τάπα, μπορούμε να γεμίσουμε με νερό, ένα άδειο δοχείο όγκου 5L, σε χρονικό διάστημα 10s.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα εκροής του νερού, από το άκρο του σωλήνα.

ii) Ποιο το βάθος h του νερού στο δοχείο;

iii) Θέλοντας να αυξήσουμε την παροχή, παρεμβάλουμε στο σωλήνα μια αντλία, όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα να γεμίζουμε ένα άδειο δοχείο όγκου 6L σε χρονικό διάστημα 10s:



α) Πόση είναι τώρα η ταχύτητα εκροής του νερού;

β) Να βρεθεί η ισχύς της αντλίας.

Το νερό να θεωρηθεί ιδανικό ρευστό, πυκνότητας $1.000kg/m^3$, οι παραπάνω ροές μόνιμες και στρωτές, στη διάρκεια των οποίων δεν μεταβάλλεται το ύψος του νερού στο δοχείο, ενώ $g=10m/s^2$.

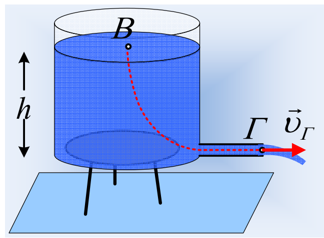
Απάντηση:

i) Από την σχέση για την παροχή του σωλήνα, παίρνουμε:

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{5\cdot 10^{-3}m^3}{10s} = 5\cdot 10^{-4}m^3/s$$

$$\text{Αλλά και } \Pi = A\upsilon \rightarrow \upsilon = \frac{\Pi}{A} = \frac{5\cdot 10^{-4}}{1\cdot 10^{-4}}m/s = 5m/s$$

ii) Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Β στην επιφάνεια του δοχείου και ενός σημείου Γ στην έξοδο του σωλήνα έχουμε:



$$p_{\alpha\tau} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2$$

Αλλά $\upsilon_B=0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 \quad (1)$$

οπότε λύνοντας ως προς h παίρνουμε:

$$h = \frac{\upsilon_\Gamma^2}{2g} = \frac{5^2}{2\cdot 10}m = 1{,}25m$$

Σχόλιο:

Τι ακριβώς μας λέει η εξίσωση (1);

Η ανά μονάδα όγκου δυναμική ενέργεια μιας ποσότητας νερού στην περιοχή του σημείου Β, είναι ίση με την κινητική ενέργεια, μιας ίσης ποσότητας, καθώς εξέρχεται από το άκρο Γ του σωλήνα. Με άλλα λόγια εκφράζει τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, αν θεωρήσουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Γ.

iii) Με παρόμοιο τρόπο έχουμε ότι:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A\upsilon_1 \to \upsilon_1 = \frac{\Delta V}{A \cdot \Delta t}$$

$$\upsilon_1 = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-4} \cdot 10} m/s = 6m/s$$

iv) Ας ακολουθήσουμε τώρα τη λογική που περιγράψαμε στο παραπάνω σχόλιο. Μια ποσότητα νερού κοντά στην επιφάνεια έχει κάποια ενέργεια $E_B=K_B+U_B$, όπου από τη στιγμή που θεωρούμε μηδενική την ταχύτητα, γίνεται $E_B=U_B=\delta m \cdot gh$. Αυτή η ποσότητα (στην πραγματικότητα μια άλλη ίσης μάζας) όταν εξέρχεται από το σωλήνα στο Γ, έχει ενέργεια $E_\Gamma=K_\Gamma+U_\Gamma$ και θεωρώντας ότι $U_\Gamma=0$, έχει ενέργεια:

$$E_\Gamma = \frac{1}{2}\delta m \cdot \upsilon_1^2$$

Στην διάρκεια όμως της παραπάνω μετακίνησης, το νερό πέρασε από την αντλία, από την οποία πήρε κάποια ενέργεια, μέσω έργου, οπότε η διατήρηση της ενέργειας επιβάλει:

$$E_B + \delta W = E_\Gamma \to$$

$$\rho\delta V \cdot gh + \delta W = \frac{1}{2}\rho\delta V \cdot \upsilon_1^2$$

Διαιρώντας με το χρονικό διάστημα δt, όπου ο παραπάνω όγκος νερού δV εξέρχεται από το άκρο του σωλήνα, παίρνουμε:

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \left(\frac{1}{2}\rho\delta V \cdot \upsilon_1^2 - \rho gh\right)\frac{\delta V}{\delta t}$$

Αλλά η ροή θεωρείται μόνιμη με αποτέλεσμα το κλάσμα $\frac{\delta W}{\delta t}$ να έχει σταθερή τιμή και να είναι ίσο με την ισχύ (στιγμιαία) της αντλίας, ενώ το κλάσμα $\frac{\delta V}{\delta t}$ δεν είναι τίποτα άλλο από την παροχή του σωλήνα, οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$P_a = \left(\frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_1^2 - \rho gh\right) \cdot \Pi \quad (2)$$

Με αντικατάσταση:

$$P_a = \left(\frac{1}{2}1.000 \cdot 6^2 - 1.000 \cdot 10 \cdot 1{,}25\right) \cdot \frac{6 \cdot 10^{-3}}{10} W = 3{,}3W$$

Σχόλιο:

Στην προηγούμενη ανάρτηση: **Η αντλία και η ισχύς της** είχαμε βρει για την ισχύ της αντλίας την εξίσωση:

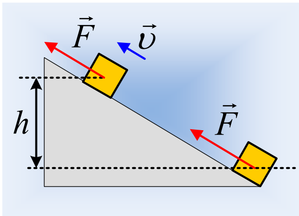
$$P_a = \left(\frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon^2 + \rho gh\right) \cdot \Pi$$

Όπου η αντλία παρείχε ενέργεια για να αυξήσει και την κινητική και τη δυναμική ενέργεια του νερού.

Ας την συγκρίνουμε με την εξίσωση (2) που βρήκαμε παραπάνω.

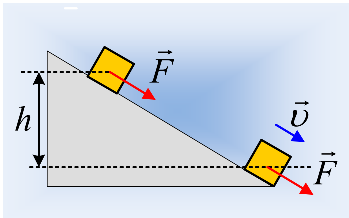
Εδώ αντίθετα, το νερό αρχικά έχει δυναμική ενέργεια, η οποία μετατρέπεται σε κινητική και η ισχύς της αντλίας αυξάνει επίσης την κινητική ενέργεια, αλλά όχι συνολικά (όχι μόνη της!!!). Ένα μέρος της τελικής κινητικής ενέργειας του νερού, οφείλεται στην αρχική δυναμική.

Ας δούμε κάτι ανάλογο, από την κίνηση σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο:



Το σώμα ξεκινά από τη βάση και ανεβαίνει κατά h:

$$W_F = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + mgh$$



Το σώμα ξεκινά από ύψος h και κατεβαίνει:

$$W_F = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - mgh$$

dmargaris@gmail.com