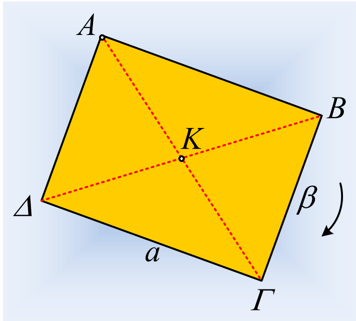
Ποιες οι ταχύτητες των σημείων της πλάκας;

Μια ορθογώνια ομογενής πλάκα με πλευρές α=0,8m και β=0,6m, μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από την κορυφή Α. Σε μια στιγμή η πλάκα βρίσκεται στη θέση του διπλανού σχήματος, έχοντας γωνιακή ταχύτητα ω=2rad/s. Για τη θέση αυτή ζητάμε να βρεθούν οι ταχύτητες των κορυφών Β και Γ, καθώς και του κέντρου μάζας Κ της πλάκας.



Δυο μαθητές ακολουθούν διαφορετικούς δρόμους επίλυσης.

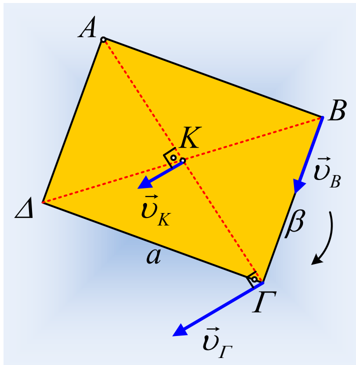
Ο μαθητής Α θεωρεί ότι η πλάκα εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα.

Ο μαθητής Β θεωρεί την κίνηση σύνθετη. Μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Κ.

Να εξετασθεί αν αυτές οι δύο θεωρήσεις είναι σωστές ή όχι.

Απάντηση:

i) Ο μαθητής Α θεωρεί την στροφική κίνηση της πλάκας, για την οποία τα σημεία Β, Γ και Κ εκτελούν κυκλική κίνηση με κέντρο την κορυφή Α του ορθογωνίου. Έτσι οι ταχύτητες είναι κάθετες στις εκάστοτε ακτίνες με μέτρα:



Για την κορυφή Β:

$$\upsilon_B=\omega\cdot(AB)=2\cdot 0{,}8m/s=1{,}6m/s.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε:

$$(A\Gamma)=\sqrt{(AB)^2+(B\Gamma)^2}=\sqrt{0{,}8^2+0{,}6^2}\,m=1m$$

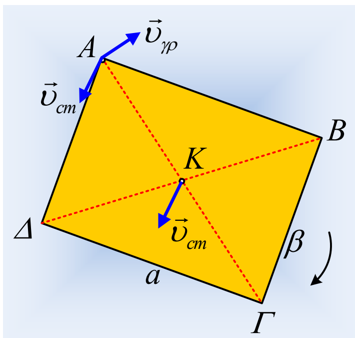
Κορυφή Γ:

$$\upsilon_\Gamma=\omega\cdot(A\Gamma)=2\cdot 1m/s=2m/s.$$

Κέντρο Κ του ορθογωνίου:

$$\upsilon_K=\omega\cdot(AK)=2\cdot 0{,}5m/s=1m/s.$$

ii) Ο μαθητής Β θεωρεί σύνθετη την κίνηση της πλάκας, όπου το κέντρο μάζας της Κ έχει κάποια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$ άγνωστου μέτρου και κατεύθυνσης. Αλλά τότε κάθε άλλο σημείο του ορθογωνίου, έχει ταχύτητα:

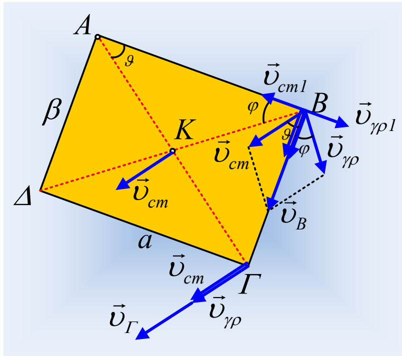


$$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_{cm}+\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$$

Όπου $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$ η γραμμική ταχύτητα λόγω της κυκλικής κίνησης του σημείου, γύρω από το κέντρο Κ του ορθογωνίου.

Αλλά αν πάρουμε την κορυφή Α, τότε έχει τις ταχύτητες που έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα, ενώ το σημείο αυτό παραμένει ακίνητο. Για να συμβαίνει αυτό οι δυο ταχύτητες θα πρέπει να είναι αντίθετες, οπότε και η υ_{cm} είναι κάθετη στην διαγώνιο ΑΓ, ενώ για τα μέτρα τους:

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho} = \omega R = \omega(AK) = 2 \cdot 0{,}5m/s = 1m/s$$



Αλλά τότε οι κορυφές Β και Γ, έχουν τις ταχύτητες που έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα, όπου

$$\upsilon_{\gamma\rho} = \omega R = 1m/s \,.$$

Με λίγη Γεωμετρία, βρίσκουμε ότι η συνιστώσα υ_{cm} την ταχύτητας του Β, σχηματίζει γωνία θ με την πλευρά ΒΓ, ίση με τη γωνία ΚΑΒ, αλλά και η $\upsilon_{\gamma\rho}$ σχηματίζει γωνία φ με την ΒΓ, ίση με τη γωνία ΚΒΑ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές, ενώ φ=θ, αφού το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές), οπότε αν αναλύσουμε τις ταχύτητες υ_{cm} και $\upsilon_{\gamma\rho}$ σε άξονες, όπως στο σχήμα, θα έχουμε:

$$\upsilon_{cm1} = \upsilon_{cm} \cdot \eta\mu\theta = \upsilon_{\gamma\rho} \cdot \eta\mu\varphi \rightarrow \upsilon_{AB} = 0$$

Αλλά τότε η ταχύτητα της κορυφής Β είναι πάνω στην πλευρά ΒΓ και έχει μέτρο:

$$\upsilon_B = \upsilon_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + \upsilon_{\gamma\rho} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 2\upsilon_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 2 \cdot \upsilon_{cm} \cdot \frac{(AB)}{(A\Gamma)} = 2 \cdot 1 \frac{0{,}8}{1} m/s = 1{,}6m/s$$

Ενώ οι δυο συνιστώσες της ταχύτητας της κορυφής Γ, είναι συγγραμμικές, κάθετες στη διαγώνιο ΑΓ, οπότε:

$$\upsilon_\Gamma = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = 2\upsilon_{cm} = 2m/s$$

Συμπέρασμα:

Οι δύο παραπάνω θεωρήσεις για την κίνηση του στερεού είναι ισοδύναμες, οδηγώντας στα ίδια αποτελέσματα, ασχέτως ποια θεωρείται (και είναι) ευκολότερη λύση….

Σχόλιο:

Αν δεν είχαμε περικοπές και στην τριγωνομετρία, θα μπορούσαμε να βρούμε την ταχύτητα της κορυφής Β, χρησιμοποιώντας τη γνωστή (από τις δυνάμεις) εξίσωση:

$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho} \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta + \phi)}$$

Όπου $\upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho} = 1m/s$ και θ+φ=2θ…

Ενώ η διαγώνιος του σχηματιζόμενου παραλληλογράμμου, διχοτομεί τη γωνία (αφού το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος…) οπότε η ταχύτητα του Β είναι πάνω στην πλευρά ΒΓ.

dmargaris@gmail.com