

Ενέργεια και επιτάχυνση σε μια σύνθετη ταλάντωση.

Ένα σώμα μάζας M κινείται ευθύγραμμα γύρω από μια θέση $y=0$, με εξίσωση κίνησης:

$$y = A \cdot \eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + A \cdot \eta\mu(\omega t)$$

i) Η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση:

$$\alpha) K = \frac{1}{4} M \omega^2 A^2, \quad \beta) K = \frac{1}{2} M \omega^2 A^2, \quad \gamma) K = 2 M \omega^2 A^2, \quad \delta) K = \frac{9}{2} M \omega^2 A^2.$$

ii) Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$, η επιτάχυνση του σώματος έχει τιμή:

$$\alpha) a_1 = -\frac{1}{4} \omega^2 A, \quad \beta) a_1 = \frac{1}{4} \omega^2 A, \quad \gamma) a_1 = -\frac{1}{2} \omega^2 A, \quad \delta) a_1 = \frac{1}{2} \omega^2 A$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Υπενθυμίζεται ότι $\eta\mu(\pi-\theta) = \eta\mu\theta$, $\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta$, $\eta\mu 30^\circ = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Απάντηση:

Η κίνηση του σώματος μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία δύο αρμονικών ταλαντώσεων με εξισώσεις

$$y_1 = A \cdot \eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{και} \quad y_2 = A \cdot \eta\mu(\omega t) \quad (\text{S.I.})$$

Με το ίδιο πλάτος $A_1 = A_2 = A$ και διαφορά φάσης $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, αλλά τότε η εξίσωση κίνησης θα είναι της μορφής:

$$y = A_o \cdot \eta\mu(\omega t + \vartheta) \quad (\text{S.I.})$$

Όπου για το πλάτος A_o έχουμε:

$$A_o = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} = \sqrt{A^2 + A^2 + 2 \cdot A \cdot A \left(-\frac{1}{2}\right)} m = A$$

$$\text{Ενώ } \varepsilon\varphi\vartheta = \frac{A_1\eta\mu\varphi}{A_2 + A_1\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{A + A \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3} \rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Άρα } y = A \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Αλλά τότε η ταχύτητα του σώματος ικανοποιεί την εξίσωση:

$$v = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

i) Με βάση τα παραπάνω η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος είναι:

$$K_{max} = \frac{1}{2} M v_{max}^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 A^2$$

Σωστό το α).

ii) Η επιτάχυνση του σώματος δίνεται από την εξίσωση:

$$a_1 = -\omega^2 y = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu\left(\omega \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\pi}{3}\right) = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$a_1 = -\omega^2 \cdot A \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \omega^2 \cdot A$$

Σωστό το γ).

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης