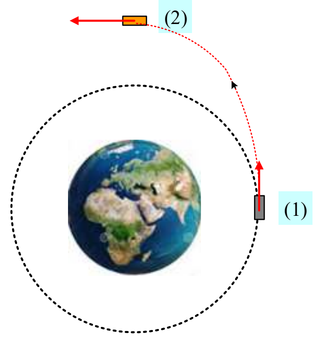
Η ανύψωση ενός δορυφόρου



Ένας τεχνητός δορυφόρος της Γης, ο «Παρατηρητής» μάζας 1tn, εκτελεί κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη σε ύψος $h_1=R_Γ$ από την επιφάνειά της. Θεωρείστε ότι η Γη είναι ακίνητη, χωρίς ατμόσφαιρα, η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά της έχει τιμή $g_o=10m/s^2$, η ακτίνα της Γης $R_Γ=6.400km$, ενώ το δυναμικό είναι μηδέν σε άπειρη απόσταση από το κέντρο της.

i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του «Παρατηρητή» καθώς και η μηχανική του ενέργεια.

ii) Κάποια στιγμή ο δορυφόρος θέτει σε λειτουργία τις τουρμπίνες του, με αποτέλεσμα να μεταφέρεται σε ύψος $h_2=2R_Γ$. Κατά τη μεταφορά αυτή, λόγω καύσης μέρους των καυσίμων, η μάζα μειώνεται με αποτέλεσμα τελικά ο «Παρατηρητής» να έχει μάζα $m_1=900kg$. Αν η ενέργεια που μεταφέρθηκε στον «Παρατηρητή» μέχρι τη στιγμή που σβήνουν οι μηχανές του είναι $6{,}45\cdot 10^9 J$ ενώ τελικά η ταχύτητά του είναι παράλληλη με το έδαφος:

α) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του «Παρατηρητή» (του εναπομείναντος τμήματος) στο ύψος h_2.

β) Ο «Παρατηρητής» στη συνέχεια:

1) θα εκτελέσει κυκλική τροχιά ακτίνας $3R_Γ$, γύρω από το κέντρο της Γης.

2) Θα διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης.

3) Τίποτα από τα δύο αυτά ενδεχόμενα.

Απάντηση:

i) Κατά την κίνησή του ο δορυφόρος δέχεται δύναμη παγκόσμιας έλξης, η οποία τον κρατά σε κυκλική τροχιά «παίζοντας» το ρόλο της κεντρομόλου, οπότε:

$$F_g = F_κ \rightarrow G\frac{Mm}{(R_Γ+h_1)^2} = m\frac{υ_1^2}{R_Γ+h_1} \rightarrow$$

$$υ_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_Γ+h_1}} \quad (1)$$

Αλλά η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι ίση:

$$g_o = G\frac{M}{R_Γ^2} \rightarrow GM = g_o R_Γ^2 \quad (2) \rightarrow$$

$$υ_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_Γ+h_1}} = \sqrt{\frac{g_o R_Γ^2}{2R_Γ}} = \sqrt{\frac{g_o R_Γ}{2}}$$

$$υ_1 = \sqrt{\frac{g_o R_Γ}{2}} = \sqrt{\frac{10\cdot 6.400\cdot 10^3}{2}}m/s = \frac{8.000}{\sqrt{2}}m/s \approx 5.657m/s.$$

Η ενέργεια του δορυφόρου στην αρχική του τροχιά είναι:

$$E_{\mu\eta\chi}=K+U=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2-G\frac{Mm}{r}=\frac{1}{2}mG\frac{M}{r}-G\frac{Mm}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}\rightarrow$$

$$E_{\mu\eta\chi,1}=-\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}=-\frac{1}{2}\frac{g_oR_\Gamma^2 m}{2R_\Gamma}=-\frac{mg_oR_\Gamma}{4}\quad(3)$$

$$E_{\mu\eta\chi,1}-\frac{mg_oR_\Gamma}{4}=-\frac{1.000\cdot 10\cdot 6.400\cdot 10^3}{4}J=-16\cdot 10^9 J.$$

ii) Υπολογίζουμε την αρχική μηχανική ενέργεια που έχει το «εναπομείναν» τμήμα του δορυφόρου, πριν τεθούν σε λειτουργία οι μηχανές του. Η ενέργεια θα υπολογιστεί από την σχέση (3) με μάζα m_1:

$$E'_{\mu\eta\chi,1}-\frac{m_1g_oR_\Gamma}{4}=-\frac{900\cdot 10\cdot 6.400\cdot 10^3}{4}J=-14{,}4\cdot 10^9 J.$$

α) Με βάση τη διατήρηση της ενέργειας, η τελική ενέργεια του «Παρατηρητή» θα ισούται με την αρχική του ενέργεια συν την ενέργεια που πήρε από τα καυσαέρια:

$$E_{\mu\eta\chi,2}=E'_{\mu\eta\chi,1}+\Delta E=-14{,}4\cdot 10^9 J+6{,}45\cdot 10^9 J=-7{,}95\cdot 10^9 J$$

Αλλά $E_{\mu\eta\chi,2}=K_2+U_2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_2^2-G\frac{Mm_1}{r_2}\rightarrow$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_2^2=E_{\mu\eta\chi,2}+G\frac{Mm_1}{r_2}=E_{\mu\eta\chi,2}+\frac{m_1g_oR_\Gamma^2}{3R_\Gamma}=E_{\mu\eta\chi,2}+\frac{m_1g_oR_\Gamma}{3}$$

$$\upsilon_2=\sqrt{\frac{2E_{\mu\eta\chi,2}}{m_1}+\frac{2g_oR_\Gamma}{3}}=\sqrt{\frac{2\cdot(-7{,}95\cdot 10^9)}{900}+\frac{2\cdot 10\cdot 6.400\cdot 10^3}{3}}m/s=5.000m/s.$$

β) Για να μπορούσε ο «Παρατηρητής» να εκτελούσε ξανά κυκλική κίνηση με κέντρο, το κέντρο της Γης, ακτίνας $r=R_\Gamma+h_2=3R_\Gamma$, θα έπρεπε να έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_3=\sqrt{\frac{GM}{R_\Gamma+h_2}}=\sqrt{\frac{g_oR_\Gamma^2}{3R_\Gamma}}=\sqrt{\frac{g_oR_\Gamma}{3}}=\sqrt{\frac{10\cdot 6.400\cdot 10^3}{3}}m/s\approx 4.620m/s.$$

1) Με σύγκριση των παραπάνω τιμών ταχύτητας βλέπουμε ότι ο «Παρατηρητής» έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από αυτήν που απαιτείται για κυκλική τροχιά. Συνεπώς η πρόταση 1) είναι λανθασμένη.

2) Υπολογίζουμε την ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος σε ύψος h_2:

$$\upsilon_\delta=\sqrt{\frac{2GM}{R_\Gamma+h_2}}=\sqrt{\frac{2g_oR_\Gamma^2}{3R_\Gamma}}=\sqrt{\frac{2g_oR_\Gamma}{3}}=\sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 6.400\cdot 10^3}{3}}m/s\approx 6.500m/s.$$

Οπότε ο «Παρατηρητής» δεν μπορεί να διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης.

3) Συνεπώς ο «Παρατηρητής» θα συνεχίσει να περιστρέφεται γύρω από τη Γη, χωρίς όμως η τροχιά να είναι κυκλική.

Σχόλιο:

Υπολογίζοντας την ενέργεια του «Παρατηρητή» στο ύψος h_2 βρήκαμε $E_{μηχ,2}=-7,95\cdot 10^9 J$. Αλλά από τη στιγμή που υπολογίσαμε αρνητική ενέργεια ο «Παρατηρητής» δεν μπορεί να διαφύγει και να βρεθεί σε άπειρη απόσταση με θετική κινητική ενέργεια ή έστω μηδενική. Έτσι ο υπολογισμός της ταχύτητας διαφυγής δεν ήταν απαραίτητος…

dmargaris@gmail.com