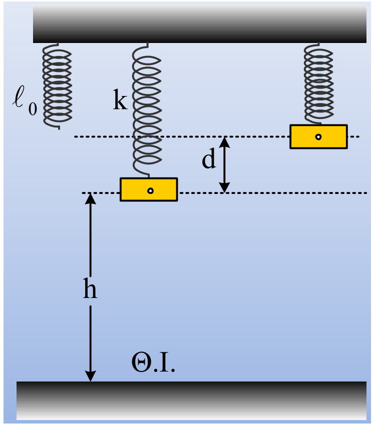
Μηχανική ενέργεια και ενέργεια Ταλάντωσης.



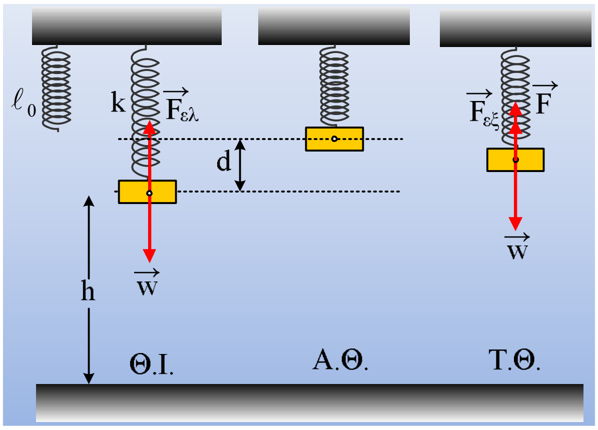
Ένα σώμα μάζας 3kg ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k_1= k=100N/m, όπως στο σχήμα, ευρισκόμενο σε ύψος h=0,7m από το έδαφος. Ασκώντας πάνω του μια εξωτερική δύναμη F_1, το μετακινούμε κατακόρυφα ανεβάζοντάς το κατά d=0,3m και το αφήνουμε να ταλαντωθεί, εκτελώντας ΑΑΤ. Θεωρείστε ότι το σώμα, αμελητέων διαστάσεων, έχει μηδενική δυναμική ενέργεια όταν βρίσκεται στο έδαφος και $g=10m/s^2$.

i) Να υπολογίσετε την αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα-ελατήριο καθώς και το έργο της εξωτερικής δύναμης F_1 για την εκτροπή του σώματος. Πόση είναι τελικά η μηχανική ενέργεια του συστήματος και πόση η ενέργεια ταλάντωσης;

ii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα τοποθετούμε κάτω από το σώμα ένα δεύτερο κατακόρυφο ελατήριο, σταθεράς k_2=k και φυσικού μήκους ℓ_0=0,9m, με τον άξονά του να ταυτίζεται με τον άξονα του πάνω ελατηρίου και αφήνουμε το σώμα να κινηθεί. Να αποδείξτε ότι μόλις το σώμα έρθει σε επαφή με το κάτω ελατήριο, θα ξεκινήσει μια νέα ταλάντωση, η οποία είναι επίσης ΑΑΤ, υπολογίζοντας την ενέργεια ταλάντωσής της.

iii) Να υπολογίστε τη μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα-ελατήριο στη διάρκεια της δεύτερης ταλάντωσης.

Απάντηση:



i) Το σώμα αρχικά ισορροπεί, έχοντας επιμηκύνει κατά $\Delta\ell$ το ελατήριο, οπότε από τη συνθήκη ισορροπίας παίρνουμε:

$$\Sigma F=0 \text{ ή } F_{ελ}=Mg \rightarrow$$

$$\Delta\ell=\frac{Mg}{k}=\frac{3\cdot 10}{100}m=0,3m=d$$

Δηλαδή η ακραία θέση, από όπου αφήνεται να ταλαντωθεί είναι και η θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του.

Η αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα-ελατήριο θα είναι:

$$E_{μηχ/αρχ}=U_{ελ}+U_{βαρ}=\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2+Mgh=\frac{1}{2}100\cdot 0,3^2J+3\cdot 10\cdot 0,7J=25,5J$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος από την αρχική θέση ισορροπίας μέχρι να εκτρέψουμε το σώμα κατά d προς τα πάνω και παίρνουμε:

$$K_{τελ}-K_{αρχ}=W_w+W_{F_{ελ}}+W_{F1}\rightarrow$$

$$0-0=-Mgd+\left(\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2-0\right)+W_{F1}\rightarrow$$

$$W_{F1}=Mgd-\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2=k(\Delta\ell)^2-\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2=\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2=\frac{1}{2}100\cdot 0{,}3^2 J=4{,}5J$$

Τη στιγμή που πρόκειται να αφήσουμε το σώμα να κινηθεί (ακραία θέση) το σύστημα σώμα-ελατήριο, έχει μηχανική ενέργεια:

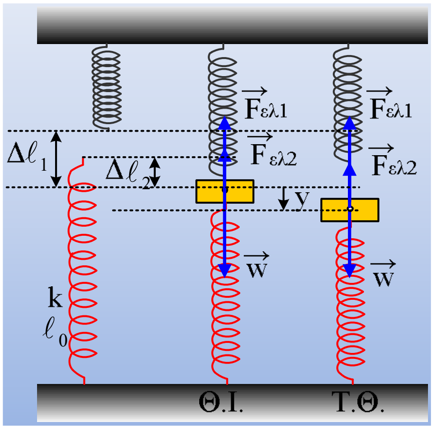
$$E_{μηχ/τελ}=U_{ελ}+U_{βαρ}=0+Mg(h+d)=+3\cdot 10\cdot 1J=30J$$

Ενώ η ενέργεια ταλάντωσης που θα επακολουθήσει θα είναι:

$$E_{1ταλ}=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}100\cdot 0{,}3^2 J=4{,}5J$$

Αφού το σώμα θα ξεκινήσει την ταλάντωσή του χωρίς αρχική ταχύτητα από απομάκρυνση d, συνεπώς A=d.

ii) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας και σε μια τυχαία θέση.



Για την Θ.Ι. έχουμε: ΣF=0 ή

$F_{ελ1}+F_{ελ2}=Mg \rightarrow k\Delta\ell_1+k\Delta\ell_2=Mg$ (1)

Ενώ $\Delta\ell_1-\Delta\ell_2=0{,}1$ (2)

Από (1) και (2) βρίσκουμε $\Delta\ell_1$=0,2m και $\Delta\ell_2$=0,1m.

Παίρνοντας τώρα το σώμα στην τυχαία θέση με απομάκρυνση y, έχουμε:

$$ΣF=w-F_{ελ1}-F_{ελ2}=Mg-k_1(\Delta\ell_1+y)-k_2(\Delta\ell_2-y)=-(k_1+k_2)y\rightarrow$$

$$ΣF=-2κ\cdot y$$

Συνεπώς το σώμα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς D=2k.

Η ενέργεια ταλάντωσης, είναι ίση με την ενέργεια τη στιγμή της επαφής του σώματος με το κάτω ελατήριο, όπου η απομάκρυνση έχει μέτρο $|y_1|$=0,1m:

$$E_{2ταλ}=\frac{1}{2}M\upsilon_1^2+\frac{1}{2}Dy_1^2 \quad (3)$$

Αλλά από τη διατήρηση της ενέργειας της πρώτης ταλάντωσης έχουμε:

$$E_{1ταλ}=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}M\upsilon_1^2\rightarrow\frac{1}{2}M\upsilon_1^2=E_{1ταλ}-\frac{1}{2}kx^2=4{,}5J-\frac{1}{2}100\cdot 0{,}1^2 J=4J$$

αφού τη στιγμή αυτή απέχει από τη θέση ισορροπίας της πρώτης ταλάντωσης κατά d-$\Delta\ell_1$=0,1m. Με αντικατάσταση τώρα στην (3) παίρνουμε:

$$E_{2ταλ}=\frac{1}{2}M\upsilon_1^2+\frac{1}{2}Dy_1^2=4J+\frac{1}{2}200\cdot 0{,}1^2 J=5J$$

iii) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα σώμα-ελατήρια (Γη) είναι συντηρητικές, συνεπώς η μηχανική ενέργεια σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου παραμένει σταθερή και ίση με αυτή στην αρχική θέση:

$$E_{μηχ}= U_{ελ1} + U_{ελ2}+U_{βαρ}= 30J$$

Σχόλια:

1) Ενέργεια ταλάντωσης ονομάζουμε το μέρος της μηχανικής ενέργειας, το επιπλέον της μηχανικής ενέργειας που έχει το σύστημα στην θέση ισορροπίας, την οποία δεν λαμβάνουμε υπόψη μας θεωρώντας την μηδενική. Έτσι στο παράδειγμά μας, το σώμα αρχικά έχει μηχανική ενέργεια 25,5J, χωρίς να ταλαντώνεται. Αν θέλουμε να εκτελέσει ταλάντωση, πρέπει να του προσφέρουμε επιπλέον ενέργεια ίση με 4,5J. Αλλά τότε θα αποκτήσει μηχανική ενέργεια 30J, ενώ η ενέργεια ταλάντωσης θα είναι 4,5J, ίση δηλαδή με την ενέργεια που του προσφέρθηκε (μέσω του έργου κάποιας εξωτερικής δύναμης F_1).
2) Κατά τη $2^η$ ταλάντωση το σώμα δεν ξεκίνησε από τη θέση ισορροπίας του, ώστε με ανάλογο τρόπο να υπολογίσουμε την ενέργεια που κάποιος του πρόσφερε και έτσι να βρούμε την ενέργεια ταλάντωσης. Αλλά ούτε και υπάρχει κάποιος νόμος που να μας λέει ότι η ενέργεια της πρώτης ταλάντωσης θα είναι ίση με την ενέργεια της δεύτερης ή κάποια αρχή που να λέει ότι η ενέργεια (των δύο ταλαντώσεων) παραμένει σταθερή. Έτσι αν θέλουμε να διαπιστώσουμε τι συμβαίνει με τις ενέργειες, πρέπει να δούμε «όλη την εικόνα» και αυτό θα γίνει αν μελετήσουμε την μηχανική ενέργεια. Η οποία στην περίπτωσή μας παραμένει σταθερή, ανεξάρτητα, αν το σώμα στο ένα τμήμα της διαδρομής του, κάνει την Α και στη συνέχεια τη Β ταλάντωση.
3) Προφανώς θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη μηχανική ενέργεια για την τυχαία θέση με απομάκρυνση y. Δεν το κάναμε για να μην «χαθούμε» στις πράξεις. Όποιος θέλει μπορεί να το δοκιμάσει, αρκεί να λάβει υπόψη του τις δυναμικές ενέργειες των δύο ελατηρίων και τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος.

dmargaris@sch.gr