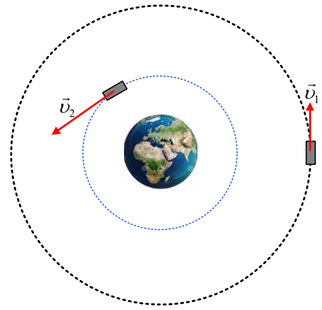
Οι τριβές ρίχνουν τον δορυφόρο



Ένας δορυφόρος μάζας 1tn, έχει τεθεί σε κυκλική τροχιά, με κέντρο το κέντρο της Γης, σε ύψος $h_1=3R_Γ$ από την επιφάνειά της. Θεωρούμε τη δυναμική ενέργεια μηδενική σε άπειρη απόσταση από τη Γη, την οποία Γη, θεωρούμε ακίνητη και χωρίς άλλα ουράνια σώματα στην γειτονιά της.

i) Πόση είναι η μηχανική ενέργεια του δορυφόρου;

Μπορεί να θεωρούμε ότι ο δορυφόρος βρίσκεται σε μεγάλο ύψος, αλλά υπάρχει αέρας (ατμόσφαιρα) και στο ύψος αυτό, με αποτέλεσμα να ασκείται δύναμη αντίστασης (τριβή), η οποία μειώνει τη μηχανική ενέργεια του δορυφόρου.

ii) Αν μετά από μια περιφορά ο δορυφόρος πέφτει κατά $y_1=4m$, να υπολογίσετε τη μηχανική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμική, μέσω του έργου της αντίστασης.

iii) Η μείωση του ύψους συνεχίζεται, με αποτέλεσμα μετά από 10 χρόνια ο δορυφόρος να στρέφεται σε ύψος $h_2=R_Γ$ από την επιφάνεια της Γης. Υποστηρίζεται ότι κατά την πτώση αυτή, αφού η ασκούμενη δύναμη (τριβή) αντιστέκεται στην κίνηση, ο δορυφόρος επιβραδύνεται. Να εξετάσετε αν αυτό είναι ή όχι σωστό.

iv) Να υπολογίσετε τη μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική στη διάρκεια των 10 χρόνων πτώσης του δορυφόρου.

Δίνεται η επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_o=10m/s^2$, η ακτίνα της Γης $R_Γ=6.400km$, ενώ το σχήμα της τροχιάς του δορυφόρου είναι σχεδόν κυκλική, κάθε χρονική στιγμή.

Απάντηση:

i) Στο αρχικό ύψος, ο δορυφόρος δέχεται από τη Γη δύναμη παγκόσμιας έλξης, η οποία «παίζει το ρόλο» της κεντρομόλου δύναμης:

$$F_g = F_\kappa \rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \quad (1)$$

Συνεπώς η μηχανική ενέργεια του δορυφόρου είναι ίση με:

$$E_{\mu\eta\chi.1} = K + U = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - G\frac{Mm}{r} \xrightarrow{(1)} E_{\mu\eta\chi.1} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} \quad (2)$$

Στην επιφάνεια της Γης, η επιτάχυνση της βαρύτητας δίνεται από την εξίσωση:

$$g_0 = G\frac{M}{R_Γ^2} \rightarrow GM = g_0 R_Γ^2$$

Οπότε: $$E_{\mu\eta\chi.1} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2}\frac{mg_0R_Γ^2}{4R_Γ} = -\frac{1}{8}mg_0R_Γ \rightarrow$$

$$E_{\mu\eta\chi.1} = -\frac{1}{8}mg_0R_Γ = -\frac{1}{8}1.000 \cdot 10 \cdot 6.400 \cdot 10^3\, J = -8 \cdot 10^9\, J.$$

ii) Αν ο δορυφόρος πέσει κατά 4m, δεν θα υπάρξει ουσιαστική μεταβολή της ταχύτητάς του, όπως προκύπτει από την εξίσωση (1), αφού η ακτίνα θα γίνει $r'=4R_Γ-4m=4R_Γ$. Αλλά, αν θεωρούμε (πρακτικά) σταθερή την ακτίνα, δεν θα έχουμε και αλλαγή στην επιτάχυνση της βαρύτητας αφού:

$$g_{h_1} = G\frac{M}{16R_Γ^2} = \frac{g_0 R_Γ^2}{16R_Γ^2} = \frac{1}{16}g_0 .$$

Αλλά τότε η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική είναι ίση με τη μείωση της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή:

$$Q_T = mg_{h1}y_1 = 1.000\frac{1}{16}10\cdot 4J = 2.500J$$

iii) Από την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{υ^2}{r} \rightarrow υ = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (3)$$

Δηλαδή η ταχύτητα του δορυφόρου, είναι αντιστρόφως ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της απόστασής του από το κέντρο της Γης. Αυτό σημαίνει ότι καθώς πέφτει ο δορυφόρος η ταχύτητά του αυξάνεται και η πρόταση είναι λανθασμένη.

iv) Στην τελική του τροχιά, ο δορυφόρος έχει μηχανική ενέργεια, η οποία υπολογίζεται από την σχέση (2):

$$E_{μηχ.2} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2}\frac{mg_0R_Γ^2}{2R_Γ} = -\frac{1}{4}mg_0R_Γ \rightarrow$$

$$E_{μηχ.2} = -\frac{1}{4}mg_0R_Γ = -\frac{1}{4}1.000\cdot 10\cdot 6.400\cdot 10^3 J = -16\cdot 10^9 J$$

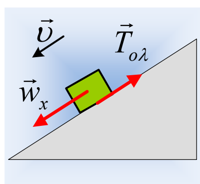
Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε, ότι η αρχική ενέργεια κατά ένα μέρος μετατρέπεται σε θερμική και το υπόλοιπο παραμένει ως τελική ενέργεια του δορυφόρου:

$$E_{μηχ.1} = E_{μηχ.2} + Q_θ \rightarrow$$

$$Q_θ = E_{μηχ.1} - E_{μηχ.2} = -8\cdot 10^9 J - \left(-16\cdot 10^9\right)J = 8\cdot 10^9 J$$

Σχόλια:

1) Μπορεί να φαίνεται «περίεργο» το συμπέρασμα του iii) ερωτήματος, αλλά αρκεί να σκεφτείτε ένα σώμα να ολισθαίνει κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου w_x=100N και $T_{ολ}$=60N. Τι κάνει η ταχύτητα του σώματος;



2) Αν προσέξουμε τους δυο υπολογισμούς της θερμικής ενέργειας, θα διαπιστώσουμε ότι την πρώτη φορά δουλέψαμε θεωρώντας ομογενές το βαρυτικό πεδίο και τη δεύτερη ανομοιογενές!

dmargaris@gmail.com