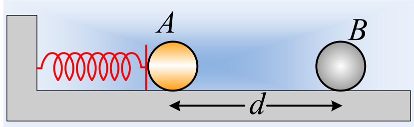
Η πρώτη και η δεύτερη κρούση.



Δυο σφαίρες Α και Β με ίσες ακτίνες και μάζες m_1=1kg και m_2=4kg, ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο απέχοντας ορισμένη απόσταση d. Η σφαίρα Α εφάπτεται στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k=40N/m, χωρίς να είναι δεμένη σε αυτό. Ασκώντας κατάλληλη οριζόντια δύναμη στη σφαίρα Α την μετατοπίζουμε, συμπιέζοντας το ελατήριο κατά $\Delta\ell$=(2/π)m και κάποια στιγμή t_0=0, την αφήνουμε να κινηθεί. Η σφαίρα αφού εγκαταλείψει το ελατήριο συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά τη στιγμή t_1=0,55 s με τη Β σφαίρα.

i) Να υπολογιστούν οι ταχύτητες της Α σφαίρας πριν και μετά την κρούση.

ii) Να εξηγήσετε (ποιοτικά) γιατί θα υπάρξει και δεύτερη σύγκρουση μεταξύ των δύο σφαιρών.

iii) Θεωρώντας αμελητέα τη διάρκεια της κρούσης, πόση θα είναι η απόσταση των δύο σφαιρών τη στιγμή t_2=1,3 s;

iv) Να βρεθούν οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την δεύτερη μεταξύ τους κρούση.

Δίνεται $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:

i) Η Α σφαίρα, για όσο χρόνο βρίσκεται σε επαφή με το ελατήριο εκτελεί ΑΑΤ με πλάτος Α=(2/π)m, αφού ξεκινά την ταλάντωσή της από ακραία θέση, με μηδενική ταχύτητα. Θα χάσει δε την επαφή της με το ελατήριο, στην αρχική θέση (θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου) έχοντας αποκτήσει ταχύτητα, με φορά προς τα δεξιά (θετική φορά) και μέτρο:

$$\upsilon_1 = \omega A_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} A_1 = \sqrt{\frac{40}{1}} \frac{2}{\pi} m/s = 4m/s$$

Με την ταχύτητα αυτή στη συνέχεια θα κινηθεί ευθύγραμμα και ομαλά και θα συγκρουστεί με τη σφαίρα Β. Οι ταχύτητες μετά την κρούση θα είναι ίσες:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{1-4}{1+4} 4m/s = -2,4m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2 \cdot 1}{1+4} 4m/s = 1,6m/s$$

ii) Παραπάνω βρήκαμε ότι η Α σφαίρα αποκτά αρνητική ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι θα κινηθεί προς τα αριστερά, θα συμπιέσει ξανά το ελατήριο (εκτελώντας ΑΑΤ) και μετά από μισή περίοδο, θα εγκαταλείψει ξανά το ελατήριο κινούμενη προς τα δεξιά με ταχύτητα ίσου μέτρου, δηλαδή 2,4m/s (μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης) «καταδιώκοντας» τη σφαίρα Β. Επειδή δε $|\upsilon_1'| > |\upsilon_2'|$ κάποια στιγμή θα την φτάσει και θα επακολουθήσει $2^{η}$ κρούση.

iii) Η περίοδος της πρώτης ταλάντωσης της Α σφαίρας είναι ίση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{40}} s = 1s$$

Ίση, με την περίοδο και της δεύτερης ταλάντωσης.

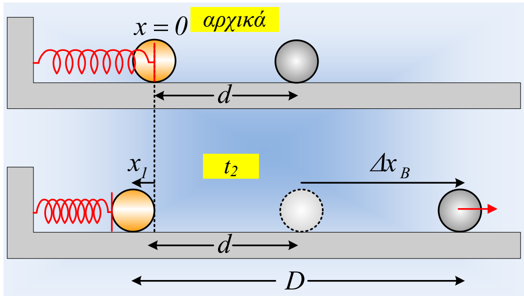
Αλλά τότε η σφαίρα χρειάζεται χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = \frac{T}{4} = 0{,}25s$ για να εγκαταλείψει το ελατήριο, οπότε θα κινηθεί για χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = t_1 - \Delta t_1 = 0{,}55s - 0{,}25s = 0{,}3s$ μέχρι να συγκρουστεί με τη Β σφαίρα. Οπότε $d = \upsilon_1 \cdot \Delta t_2 = 1{,}2m$.

Θεωρώντας λοιπόν x=0 την αρχική θέση της Α σφαίρας, θα έχουμε ότι αρχικά οι δυο σφαίρες ισορροπούσαν στις θέσεις $x_{0A}=0$ και $x_{0B}=1{,}2m$.

Αλλά τότε η Α σφαίρα, μετά την κρούση, θα χρειαστεί χρονικό διάστημα Δt_3 για να επιστρέψει στη θέση x=0, όπου:

$$\Delta x = \upsilon'_1 \Delta t_3 \rightarrow \Delta t_3 = \frac{\Delta x}{\upsilon'_1} = \frac{0 - 1{,}2m}{-2{,}4m/s} = 0{,}5s$$

αρχίζοντας τη δεύτερη ταλάντωσή της. Τότε το χρονικό διάστημα που ταλαντώνεται μέχρι τη στιγμή t_2 είναι $\Delta t_4 = t_2 - t_1 - \Delta t_3 = 1{,}3s - 0{,}55s - 0{,}5s = 0{,}25s = \frac{T}{4}$, οπότε η σφαίρα Α βρίσκεται στην ακραία αριστερή θέση της νέας ταλάντωσης, στη θέση $x_1 = -A_2$, όπου A_2 το νέο πλάτος ταλάντωσης.



Αλλά η ταχύτητα υ'_1 είναι και η μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης, οπότε $\upsilon'_1 = \omega A_2$, και:

$$A_2 = \frac{|\upsilon'_1|}{\omega} = \frac{2{,}4}{2\pi} m = \frac{1{,}2}{\pi} m \approx 0{,}38m$$

Εξάλλου η Β σφαίρα έχει κινηθεί για χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1 = 1{,}3s - 0{,}55s = 0{,}75s$, έχοντας μετατοπισθεί κατά $\Delta x_B = \upsilon'_2 \Delta t = 1{,}6 \cdot 0{,}75m = 1{,}2m$, φτάνοντας στη θέση:

$$x_B = x_{0B} + \Delta x_B = 1{,}2m + 1{,}2m = 2{,}4m\,.$$

Συνεπώς η απόσταση των δύο σφαιρών είναι τώρα:

$$D = |x_1| + x_B = 0{,}38m + 2{,}4m = 2{,}78m$$

iv) Ελάχιστα πριν τη δεύτερη κρούση και οι δυο σφαίρες κινούνται προς τα δεξιά με ταχύτητες $\upsilon'_1 = 2{,}4m/s$ και $\upsilon'_2 = 1{,}6m/s$, οπότε για τις ταχύτητες μετά την κρούση έχουμε:

$$\upsilon''_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon'_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon'_2 = \frac{1-4}{1+4} 2{,}4m/s + \frac{2 \cdot 4}{1+4} 1{,}6m/s = 1{,}12m/s$$

$$\upsilon''_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon'_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon'_2 = \frac{2}{1+4} 2{,}4m/s + \frac{4-1}{1+4} 1{,}6m/s = 1{,}92m/s$$

dmargaris@gmail.com